

Analytische

Theorie der Statik

Inhalt

Einleitung

von

Im Vorlesung: Zusammensetzung der Kräfte, welche entweder auf einem Punkt oder in einem System der parallelen Richtungen wirken

Lehrbuch: **Dr. L. A. Sohncke,** Gleichgewicht

ord. Professor der Mathematik an der Universität zu Halle.

Im Vorlesung: Theorie des Systems von Kräften

Im Vorlesung: Theorie der Kräfte

Im Vorlesung: Das Princip der virtuellen Geschwindigkeit

Mit fünf Kupfertafeln.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt,

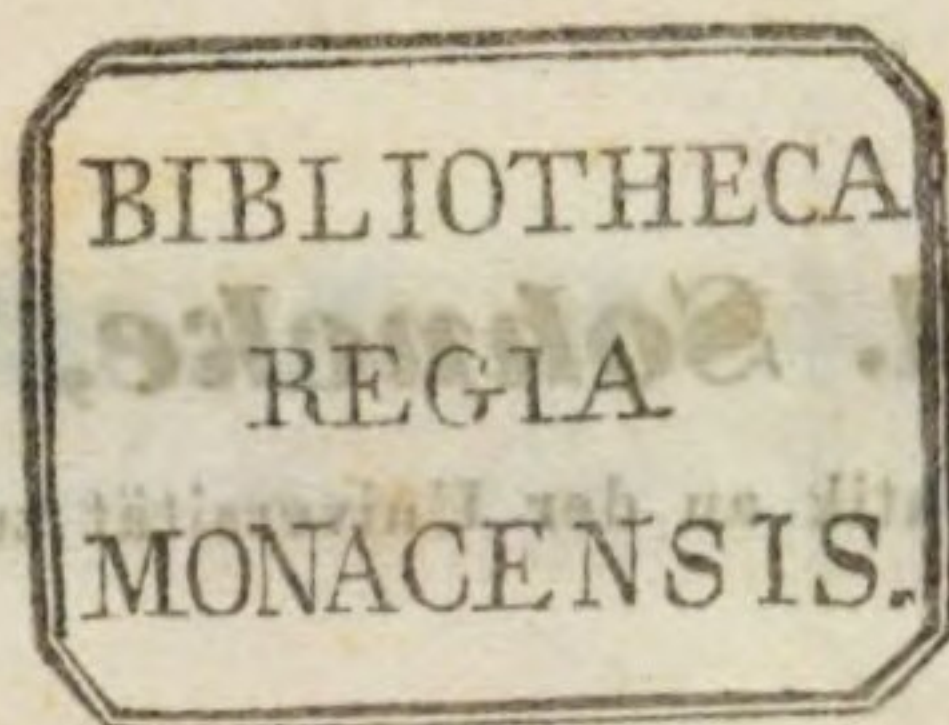
1853.

Math. P. 533 ²² / 2, 1.2

Analytische

Theorie der Statik

von



Zweiter Band.

Analytische Mechanik

Mit fünf Kupferstichen.

Analytische Statik

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1853.

5

Einleitung.

Inhalt.

Es gibt für die analytische <u>Behandlung</u> irgend welchen Gegenstan-	S.
den nur ein einziges Grundprincip in der Mathematik, nämlich diese	1.
Einleitung	1.
Erste Vorlesung: Zusammensetzung der Kräfte, welche ent-	
weder auf Einen Punkt oder in unter einan-	
der parallelen Richtungen wirken	7.
Zweite Vorlesung: Bedingungsgleichungen des Gleichge-	
wichts eines beliebigen Systems von Kräften	49.
Dritte Vorlesung: Theorie des Schwerpunktes	77.
Vierte Vorlesung: Theorie der Kettenlinie	137.
Fünfte Vorlesung: Das Princip der virtuellen Geschwindig-	
keit	153.

zuschreiben, wenigstens wären gewiss viele Papier- und Druckkosten erspart worden.

Wie stossen im Verlauf des mathematischen Studiums auf mehrere Fundamentalsätze, bei welchen der Versuch eines sogenannten rein mathematischen Beweises an dieser Klippe scheiterte und scheitern mußte. So hat man sich seit Jahrhunderten abgemüht, das 11. Euklidischen Satz geometrisch, d. h. durch rein geometrische Constructionen (nur mit Hilfe des Lineals und Zirkels) zu beweisen. Alle begingen in ihrem Raisonnement denselben Fehler: sie stellten, vor analytisch zu sprechen, in einer Gleichung Größen verschiedener Benennung zusammen und erwarteten daraus doch irgend ein Resultat; sie sprachen Alle nur von Linien, wollten durch diese allein Alles ausführen und berücksichtigen nicht, dass bei dem Parallel-Sein der Linien ein ganz neues Element in Betracht kommt, mag man es Winkel zweier Linien oder Neigung oder Ähnlichkeit nennen, auf jeden Fall aber ein solches Element, welches sich nicht durch Linien messen lässt und also nicht mit diesen, als gleichbenannt

Inhalt

1.	Einleitung
2.	Erste Vorlesung: Zusammensetzung der Kräfte, welche ent-
	weder auf einen Punkt oder in unter einan-
7.	der parallelen Richtungen wirken
	Zweite Vorlesung: Bedingungen des Gleichge-
40.	wichts eines beliebigen Systems von Kräften
77.	Dritte Vorlesung: Theorie des Schwerpunktes
137.	Vierte Vorlesung: Theorie der Mittelkräfte
168.	Fünfte Vorlesung: Das Princip der virtuellen Geschwindig-
	keit

Einleitung.

Es gibt für die analytische Behandlung irgend welchen Gegenstandes nur ein einziges Grundprincip in der Mathematik, nämlich dieses: Man darf nur Dinge von einerlei Art in Vergleichung zu einander stellen. Dieses Princip ist ebenso wohl festzuhalten bei der simplen Proportions - Rechnung und bei den gewöhnlichen Gleichungen, wo die einzelnen Termen stets Zahlen von gleicher Benennung sein müssen, so wie in der sogenannten höhern Analysis (respective Differential-Gleichungen), wo die einzelnen Termen gleiche Dimensionen in Bezug auf das Unendlich - Grosse oder Unendlich - Kleine haben müssen.

Der Vernachlässigung oder Nichtbeachtung dieses Principis hat die Wissenschaft gewiss den Verlust mancher nutzlos vergeudeteten Kräfte zuzuschreiben, wenigstens wären gewiss viele Papier- und Druckkosten erspart worden.

Wir stossen im Verlauf des mathematischen Studiums auf mehrere Fundamentalsätze, bei welchen der Versuch eines sogenannten rein mathematischen Beweises an dieser Klippe scheiterte und scheitern musste. So hat man sich seit Jahrhunderten abgemüht, den 11. Euclidischen Satz geometrisch, d. h. durch rein geometrische Construction (nur mit Hilfe des Lineals und Zirkels) zu beweisen. Alle begingen in ihrem Raisonnement denselben Fehler: sie stellten, um analytisch zu sprechen, in einer Gleichung Grössen verschiedener Benennung zusammen und erwarteten daraus doch irgend ein Resultat; sie sprechen Alle nur von Linien, wollen durch diese allein Alles ausführen und berücksichtigen nicht, dass bei dem Parallel-Sein der Linien ein ganz neues Element in Betracht kommt, mag man es Winkel zweier Linien oder Neigung oder Richtung nennen, auf jeden Fall aber ein solches Element, welches sich nicht durch Linien messen lässt und also nicht mit diesen, als gleichbenannt

in eine Gleichung zusammengestellt werden darf. Man darf aber hierbei nur die einfachsten philosophischen Principien zu Hilfe nehmen, was schon *Euclid*, wenn auch nicht in Worten, so doch dem Sinne nach gethan hat, so kommt man über ein solches Dilemma hinweg. Wenn man nämlich parallele Linien als solche erklärt, welche absolut gleichgiltig gegen einander sind, d. h. ganz und gar keine Beziehung zu einander haben, so folgt daraus unmittelbar, dass sie gegen eine dritte Linie, d. h. gegen ein ausserhalb von ihnen liegendes Ding, sich vollkommen gleichmässig verhalten müssen, dass sie also, da keine andre Rücksicht oder Beziehung zwischen geraden Linien in einer Ebene, als durch Winkel existiren kann, mit der dritten Linie gleiche Winkel bilden müssen.

Ganz ähnlich ist es in der Mechanik ergangen. Das bekannte Princip des Parallelogramms der Kräfte hat man auf unzählige Arten durch alleinige planimetrische Betrachtungen zu beweisen versucht. Dieses musste stets missglücken; denn man liess ausser Acht, dass mit dem Begriff der Kraft nothwendig die Begriffe der Bewegung oder der Zeit mit in die Untersuchung gezogen werden müssen. Dass aber diese sich nicht ohne Weiteres geometrisch construiren lassen, ist in der Natur der Sache begründet. — Man kommt aber auch hierbei, ebenso wie bei dem Parallelen-Theorem, auf das richtige Raisonement eines alten Geometers zurück. Dieses besteht nämlich hier in dem bekannten Archimedischen Princip, dass es der Zeit und Wirkung, also dem Effect nach gleich bleibt, ob die eine Kraft zuerst und darauf folgend eine zweite Kraft, oder ob beide gleichzeitig auf einen Punkt ihre Einwirkung ausüben. — Dieses Princip macht man sich, in moderner Weise zu sprechen, nur durch die sogenannte Grenzmethode anschaulich, oder wenn man es vorziehn will, durch die zum Theil veraltete, principaliter aber nichts anderes besagende Exhaustionsmethode.

Es giebt nun verschiedene Principien, von welchen man bei dem Vortrag über Mechanik ausgehn kann und ausgegangen ist. Die drei wesentlich von einander verschiedenen sind: das Princip des Hebels, das des Parallelogramms der Kräfte und das der virtuellen Geschwindigkeiten.

Wenn man streng wissenschaftlich-analytisch zu Werke gehen will, so muss man das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zu Grunde

legen, wie es *Lagrange* in seiner *Mécanique analytique* gethan hat, von welchem ausgezeichneten Werk — es sei beiläufig gesagt — die Einleitung ein Meisterwerk historischer Darstellung ist. Wenn es dagegen der Zweck ist, wie er bei vorliegender Schrift beabsichtigt wird, Jemanden erst in diese Wissenschaft einzuführen, so muss es erlaubt sein, um Einfachheit und Klarheit in den Vortrag zu bringen, alle möglichen Hilfsmittel, wie Figuren und Anschauungen aus dem Leben mit hinzuzuziehn. Um hierzu zu gelangen, kann man entweder von dem Princip des Parallelogramms der Kräfte ausgehen, wie es *Poisson* in seinem mit Recht ebenso berühmten als verbreiteten *Traité de Mécanique* gethan hat, oder man kann auch das Princip des Hebels zu Grunde legen, wie man es in den *Éléments de Statique* von *Poinsot* findet.

Der zuletzt angedeutete Weg soll in gegenwärtigen Vorlesungen verfolgt werden, indem natürlich die beiden andern genannten Theoreme im Laufe des Vortrages mit in Erwägung gezogen werden.

Unter der Ruhe eines Körpers versteht man das Beharren desselben an dem nämlichen Ort. Es kann aber dieser Ort entweder absolut oder nur relativ der nämliche bleiben, je nachdem er entweder im gesammten Weltall stets derselbe bleibt oder nur in Bezug auf seine nächste Umgebung, also z. B. auf der Oberfläche der Erde, verglichen mit den andern Gegenständen auf derselben, stets dieselbe Stelle einnimmt, während er sich in der That mit der Erde zugleich um die Sonne bewegt, also seinen Ort, im Allgemeinen genommen, verändert *).

Bewegung eines Körpers ist die continuirliche Aenderung der Lage desselben in Bezug auf seine nähere oder entferntere Umgebung.

Ueber Ruhe und Bewegung lässt sich folgender Satz als das Fundament der gesammten hierher gehörigen Wissenschaft aufstellen:

Wenn ein Körper in Ruhe ist, so muss er nothwendig darin bleiben, er kann nicht durch sich selbst in Bewegung

*) Ob es möglich ist von einem feststehenden Weltall zu sprechen und ob es nach dem von *Maedler* angeregten Zweifeln noch erlaubt ist, von einer feststehenden Sonne oder einem festen Centralpunkt, um welche die andern Gestirne sich bewegen, zu reden, dürfte doch wohl, mit mathematischer Gewissheit, weder zu bejahen noch zu verneinen sein.

kommen. Denn wenn er sich bewegte, so müsste er sich nothwendig nach einer bestimmten Seite hin bewegen; nun ist aber gar kein Grund vorhanden, weshalb er, durch eigenen innern Antrieb, sich gerade nach der einen Seite hin bewegen sollte und nicht nach einer andern; und da er sich natürlich nicht nach allen Seiten hin zu gleicher Zeit bewegen kann, so wird er sich gar nicht bewegen, sondern an seiner Stelle verbleiben.

Wenn wir nun andrer Seits sehen, dass ein Körper seine Stelle ändert, dass er also aus dem Zustand der Ruhe in den der Bewegung übergeht, so können wir, in Folge der soeben angestellten Betrachtung, versichert sein, dass dieses nur vermöge einer fremden Ursache, die auf ihn einwirkte, geschehn konnte. Diese Ursache, von welcher Art sie auch sein möge, deren innere Natur uns unbekannt ist und die wir nur aus ihren Wirkungen erkennen, wird Kraft genannt.

Wenn nun ein Körper aus seiner Ruhe kommt, wenn also eine Kraft auf ihn einwirkt, so kann man sich diese in doppelter Weise, entweder stossend oder ziehend denken. In beiden Fällen aber wird die Kraft dem Körper nur das Bestreben mittheilen können, sich in einer und zwar in einer geraden Linie fortzubewegen, denn in mehreren Linien zugleich kann er sich nicht bewegen und um sich in einer krummen Linie zu bewegen, muss er von der, ihm für den ersten Augenblick vorgeschriebenen Bahn ablenken, was er offenbar nicht durch sich selbst, sondern nur unter dem Einfluss andrer auf ihn wirkenden Kräfte thun kann. Diese gerade Linie, welche die Kraft im ersten Augenblick strebt, den Punkt, auf welchen sie wirkt, beschreiben zu lassen, heisst die Richtung der Kraft; während derjenige Punkt des Körpers, welchen die Kraft zunächst in Bewegung zu setzen strebt, der Angriffspunkt oder Anheftungspunkt der Kraft genannt wird. Die durch die Kraft erzeugte Bewegung selbst wird aber entweder schneller oder langsamer sein können und gemäss diesem Erfolg nennt man die dazu erforderliche Kraft entweder stärker oder schwächer und spricht deshalb auch von der Intensität oder Stärke der Kraft.

Wenn man auf der Richtungslinie einer Kraft zwei Buchstaben *A* und *B* geschrieben denkt, so ist es gleichgiltig, ob man sagt, die Linie *AB* oder die Linie *BA* gibt die Richtung der Kraft an, dagegen muss man

sorgfältig folgende beiden Ausdrücke unterscheiden: wenn die Kraft dahin strebt den Anheftungspunkt von der Seite A nach B hin zu bewegen, so sagt man, die Kraft wirkt in der Richtung von AB und zwar in dem Sinne von A nach B , will sie dagegen den Anheftungspunkt von der Seite B nach A hin bewegen, so wirkt sie in dem Sinne von B nach A .

Denken wir uns nun zwei Kräfte, welche auf einen und denselben Punkt, oder auf die beiden Endpunkte einer starren, unausdehnbaren geraden Linie, in einerlei Richtung, also in letzterm Fall in der Richtung der Verbindungslinie beider Anheftungspunkte, aber im entgegengesetzten Sinne wirken und setzen wir den Fall, dass der angegriffene Punkt oder die angegriffene starre Linie keine Bewegung annehmen, sondern an derselben Stelle in Ruhe verharren, so halten sich die beiden Kräfte gegenseitig das Gleichgewicht und man sagt, die beiden Kräfte sind einander gleich.

Hat man aber erst von zwei Kräften erkannt, dass sie einander gleich sind, so kann man sie auch beide an einem Punkt und nicht allein in einerlei Richtung, sondern auch in einerlei Sinn anheften und erhält dadurch nothwendig den Begriff der doppelten Kraft; fügt man hierzu noch eine den beiden ersten gleiche Kraft, so erhält man dadurch eine dreifache Kraft u.s.w.f., im Allgemeinen eine vielfache Kraft.

Auf diese Weise werden Kräfte ihrer Intensität nach unter einander vergleichbar, können also durch Verhältniss-Linien, die man auf ihren Richtungen aufträgt, oder durch Verhältniss-Zahlen ausgedrückt und deshalb der mathematischen Behandlung unterworfen werden. Ebenso werden aber auch die einzelnen Anheftungspunkte der Kräfte durch ihre drei Coordinaten als Punkte im Raume fixirt und die Richtungen der Kräfte durch die Winkel, welche sie mit den drei Coordinaten-Axen bilden, bestimmt werden; so dass es augenscheinlich wird, dass jede auf gegenseitige Beziehung von Kräften oder auf Bewegung bezügliche Aufgabe, wenn sie nicht auf rein handwerksmässige Weise durch Probiren oder Beobachtung und Erfahrung gelöst werden soll, ein Gegenstand des Calculs sein muss. Die streng mathematisch-wissenschaftliche Bearbeitung sämtlicher hierher gehöriger Sätze und Aufgaben bildet den Inhalt der sogenannten analytischen Mechanik, als deren allgemeines Problem sich folgendes hinstellen lässt:

Es soll die Bewegung eines Körpers oder eines Systems von Körpern bestimmt werden, wenn es von gegebenen Kräften sollicitirt wird;

oder was auf dasselbe hinauskommt:

Welche müssen die Relationen zwischen den Kräften sein, die auf ein System wirken, damit dieses System eine gegebene Bewegung im Raum annehme?

Um dieses allgemeine Problem zu lösen, fängt man mit der Lösung eines besondern Falles an, in dem gefragt wird, welche die Relationen zwischen den einzelnen Kräften sein müssen, damit das System, auf welches sie wirken, eine Bewegung $= 0$ annehme, d. h. in Ruhe bleibe. Derjenige Theil der allgemeinen Mechanik, welcher sich mit der Feststellung der Bedingungen dieser speciellen Bewegung beschäftigt, heisst die Statik, welche also die Lehre von der Ruhe oder die Wissenschaft vom Gleichgewicht der Kräfte ist. Den anderen Theil, in welchem die Gesetze irgend einer beliebigen Bewegung untersucht werden, nennt man die Mechanik im engern Sinn oder die Dynamik, die Wissenschaft von der Bewegung der Körper.

Wenn man noch auf die drei Aggregatzustände der Körper, d. h. darauf Rücksicht nehmen will, ob die Körper fest, oder tropfbar-flüssig oder expansiv-flüssig sind, so theilt man wohl noch die Statik in: Statik im engern Sinn oder Geostatik, in Hydrostatik und in Aërostatik, und die Dynamik in Dynamik im engern Sinn oder Geodynamik, in Hydrodynamik und in Aërodynamik.

Unter allen Umständen aber fängt man mit dem Vortrag über die Statik an, weil man dahin gekommen ist, die Aufgaben der Dynamik auf die Principien der Statik zurückzuführen.

Erste Vorlesung.

Zusammensetzung der Kräfte, welche entweder auf Einen Punkt oder in unter einander parallelen Richtungen wirken.

Vor allen Dingen sei hier ein für alle Mal die Uebereinkunft getroffen (welche ihre Giltigkeit beibehalten soll, bis sie im Verlauf der folgenden Vorlesungen ausdrücklich aufgehoben wird), dass, wenn von einem Körper gesprochen wird, auf dessen verschiedene Punkte verschiedene Kräfte wirken, vom Gewicht und vom Volumen desselben, so wie auch von dem Widerstand abstrahirt werden soll, den er von dem Medium erleidet, in welchem er sich bewegt. Wir halten hier einzig und allein die, freilich in der Praxis nicht zu ermöglichende Vorstellung fest, dass auf einen mathematischen Punkt oder auf ein, in sich auf unwandelbare Weise fest verbundenes, System von mathematischen Punkten Kräfte wirken, wobei die Verbindungslinien der einzelnen Punkte zwar starr und unausdehnbar gedacht werden sollen, aber dennoch mathematische Linien sind. Es ist eine solche, der Vereinfachung wegen, im Anfang gemachte Annahme gestattet, weil es sich späterhin zeigt, dass die genannten Umstände, wie Gewicht, Volumen, Widerstand, Reibung u. dgl. als besondere Kräfte in die Rechnung eingeführt und dadurch ihr Einfluss in angemessener Weise berücksichtigt werden könne.

Ein zweites, gleichfalls festzuhaltendes Uebereinkommen betrifft eine Bezeichnungsart. Wenn die gerade Linie AM die Richtung einer Kraft andeutet, wobei A der Anheftungspunkt der Kraft, M entweder ein bestimmter oder beliebiger Punkt auf der Linie, je nachdem die Verhältnisslinie der Intensität der Kraft zugleich auf ihrer Richtung mit aufgetragen ist oder nicht, so soll die Verhältnisszahl der Intensität der Kraft, die etwa durch P repräsentirt wird, auf der Linie AM zwischen A und M irgendwo drauf geschrieben werden und zwar mit dem vorgesetzten positiven (+) Zeichen, wenn die Kraft strebt, den Anheftungspunkt A nach dem Punkte M hin zu ziehn, also ihn dem Punkte M zu nähern; mit dem negativen (—) Zeichen dagegen, wenn die Kraft strebt, den Anheftungspunkt A in dem Sinne von M nach A zu stossen, also ihn von dem Punkte M zu entfernen. — An und für sich würde durchaus Nichts hindern, die entgegengesetzte Hypothese anzunehmen, da es ja nur ein Uebereinkommen ist; hier jedoch soll das Genannte festgehalten werden.

§. 1.

Wenn mehrere Kräfte $P, Q, R, \text{cet.}$ zu gleicher Zeit wirken und sich gegenseitig das Gleichgewicht halten, so wird dieses offenbar gestört werden, wenn man eine dieser Kräfte, z. B. P , wegnimmt. Es muss also diese eine Kraft P dem Zusammenwirken aller übrigen Kräfte $Q, R, S, \text{cet.}$ das Gegengewicht halten. Dieselbe Kraft P hält aber auch offenbar einer andern Kraft P' das Gleichgewicht, welche mit ihr an Intensität gleich ist und ausserdem in derselben Richtung, aber in gerade entgegengesetztem Sinne wirkt. Es muss also die einzige Kraft P' ebenso viel wirken, als die Kräfte $Q, R, S, \text{cet.}$ zusammengenommen; erstere ersetzt also vollkommen alle die letztern. Wir sehen hieraus, dass es im Allgemeinen immer möglich sein wird, eine einzige Kraft zu finden, welche auf einen Körper dieselbe Wirkung hervorbringt, als mehrere andre zusammengenommen. Diese einzige Kraft nennt man die Resultante oder Mittelkraft, wogegen die mehreren, welche sie ersetzt, die Componenten oder Seitenkräfte heissen. Mit Hilfe dieser Benennung spricht sich das vorhin Gesagte so aus: Wenn mehrere auf einen Körper wirkende Kräfte sich wirklich das Gleichgewicht halten, so ist jede einzelne von ihnen gleich und gerade entgegengesetzt der Resultante aller übrigen.

Unsre erste Aufgabe wird nun offenbar diese sein: das Gesetz aufzustellen, nach welchem man die Resultate mehrerer Kräfte findet; dieses nennt man die Zusammensetzung der Kräfte (*composition des forces*). Hieran schliesst sich dann unmittelbar die Aufsuchung des umgekehrten Gesetzes, nach welchem statt einer Kraft mehrere gesetzt werden können, welche zusammen dieselbe Wirkung ausüben, als jene; dieses wird Zerlegung einer Kraft in Seitenkräfte (*décomposition des forces*) genannt.

Ein sehr wesentlicher Hilfssatz, der bei den meisten der nächstfolgenden Deductionen in Anwendung kommt, ist dieser:

Jede Kraft kann man mit Beibehaltung der Richtung und des Sinnes ihrer Wirkung in jedem beliebigen Punkt ihrer Richtung angebracht denken, wenn nur der neue Anheftungspunkt auf unveränderliche Weise, durch eine starre

und unausdehnbare gerade Linie mit dem ursprünglichen Anheftungspunkt verbunden ist.

Der Beweis ergibt sich leicht. Denn es sei (*Fig. I.*) AM die Richtung der Kraft $+P$ und B ein Punkt auf derselben, der mit A auf unveränderliche Weise verbunden ist, so kann man sich in diesem Punkte B zwei gleiche, in einerlei Richtung, aber in gerade entgegengesetztem Sinn wirkende Kräfte $+P'$ und $-P'$ angebracht denken, die, weil sie sich unmittelbar selbst das Gleichgewicht halten, durchaus keine Störung verursachen oder irgend einen Einfluss auf das möglicher Weise sonst vorhandene Kräftesystem haben können. Setzen wir jetzt noch die Intensität der Kraft P' gleich der Intensität der Kraft P , so können wir auch die Ansicht fassen, dass die beiden an sich gleichen Kräfte $+P$ und $-P'$, weil sie an den Endpunkten der starren, unausdehnbaren geraden Linie AB in gerade entgegengesetztem Sinne wirken, sich gegenseitig aufheben. Sonach bleibt statt der drei Kräfte $+P$, $-P'$, $+P'$ nur die einzige Kraft $+P'$ übrig, welche in den Punkt B angeheftet ist und welche in die Stelle der Kraft $+P$ getreten ist, die in dem Punkt A angeheftet war, und zwar mit derselben Wirkung, da P' an Intensität gleich P angenommen wurde.

§. 2.

Wenn die Richtungen zweier Kräfte P und Q , die auf einen Punkt A (*Fig. I.*) wirken, einen Winkel MAN mit einander bilden, so wird dieser Punkt A , unter dem vereinigten Einfluss beider Kräfte, gewiss dahin streben, seinen Ort zu verlassen, d. h. sich zu bewegen. Da dieses aber offenbar nur nach einer Seite hin, nur in einer Richtung geschehen wird, da er ja nach mehreren Seiten zugleich sich nicht bewegen kann, so wird eine in derselben Richtung, in entgegengesetztem Sinn angebrachte, hinlänglich grosse Kraft, sie möge R heissen, diese Bewegung aufheben und also den beiden Kräften P und Q das Gleichgewicht halten. Wäre AL die Richtung dieser Kraft R , so wird auf der über den Anheftungspunkt A rückwärts verlängerten AL' eine Kraft $R' = R$ liegen, welche dieselbe Wirkung ausübt als die beiden Kräfte P und Q zusammen genommen, also deren Resultante ist. Hieraus folgt zunächst dieser wichtige Satz: Jede zwei Kräfte, welche auf Einen Punkt wirken, haben eine Resultante.

Was die Richtung dieser Resultante anbetrifft, so können wir nur zwei Bestimmungen und zwar ganz im Allgemeinen darüber feststellen. Erstens nämlich wird sie in einerlei Ebene mit der durch die beiden im Punkt A zusammentreffenden Richtungen AM und AN der Seitenkräfte P und Q gelegten Ebene enthalten sein müssen. Denn diese beiden Kräfte wirken nur innerhalb dieser Ebene und es ist also schon deshalb keine Veranlassung vorhanden, weshalb der sollicitirte Punkt aus dieser Ebene heraustreten sollte, aber selbst wenn dieses denkbar wäre, so liegt kein Grund vor, weshalb er eher nach der vordern als vielleicht symmetrisch nach der hintern Seite der Ebene sich bewegen sollte, da beide Seiten eine vollkommen gleiche Berechtigung haben, und er wird also vermöge des Satzes von dem zureichenden Grunde in der Ebene der Componenten P und Q bleiben müssen. — Zweitens wird die Resultante in den kleineren Winkel fallen, den die Richtungen der beiden Componenten mit einander bilden. Denn wenn die Kraft P allein wirkte, so würde sich der Punkt A in der Geraden AM fortbewegen, da aber die Kraft Q dazu kommt, so wird diese ihn nach der rechten Seite von AM hin abziehen und wenn andererseits die Kraft Q allein wirkte, so würde er sich in der Geraden AN fortbewegen, während er durch das Hinzutreten der Kraft P nach der linken Seite von AN hin abgezogen wird. In keinem Fall aber wird der Punkt A veranlasst, in den Raum U , links von AM , oder in den Raum V , rechts von AN hineinzugehn, er muss also innerhalb des spitzen Winkels MAN bleiben.

Die weitere Frage ist nun aber, auf welche Weise dieser spitze Winkel MAN durch die Resultante AL' getheilt wird. Diese kann man nur in einem einzigen Falle a priori beantworten. Wenn nämlich beide Kräfte P und Q einander gleich sind, so ist kein Grund vorhanden, weshalb die Resultante sich mehr der einen als der andern Componenten nähern sollte, sie muss stets gleich weit von beiden entfernt bleiben, d. h. sie wird den Winkel MAN halbiren.

Was die letzte Frage, nämlich die nach der Grösse der Resultante, d. h. nach dem Verhältniss derselben zu den Grössen der Componenten betrifft, so wird man nur in drei Fällen durch einfaches Raisonnement darüber entscheiden können, wenn der Winkel MAN nämlich $= 0$ oder

$= \pi$ oder $\frac{4}{3} \pi$ ist. — Wenn der Winkel erstens $= 0$ ist, so fallen nicht nur die Richtungen der beiden Kräfte P und Q zusammen, sondern sie wirken auch in einerlei Sinn und erhalten deshalb nach dem in der Einleitung entwickelten Begriff von Kraft, als messbarer Quantität, die Summe $P + Q$ zu ihrer Resultante; ganz ähnlich ergibt sich bei einem Winkel $= 180^\circ$, wobei die beiden Componenten zwar in einerlei Richtung, aber in gerade entgegengesetztem Sinne wirken, die Differenz $P - Q$ als Resultante. Für beide Fälle zusammengekommen kann man den Satz, ausgedehnt auf eine beliebige Anzahl von Kräften, so aussprechen:

Von beliebig vielen Kräften, die in einerlei Richtung wirken, ist die Resultante gleich dem Ueberschuss der Summe derjenigen, welche in dem einen Sinne wirken, über die Summe derer, welche in dem entgegengesetzten Sinne wirken und sie wirkt selbst in dem Sinne der grössern Summe.

Um von dem dritten Fall zu sprechen, denke man sich (Fig. II.) drei gleiche Kräfte P auf den Punkt A wirken und zwar in den Richtungen AM , AN , AL , welche, je zwei, einen Winkel von 120° mit einander bilden. Diese drei Kräfte werden sich nothwendig das Gleichgewicht oder den Punkt A in Ruhe halten müssen; denn sollte er sich nach irgend einer Seite hin bewegen, so stünde gleich die Frage frei, weshalb bewegt er sich gerade nach dieser und nicht nach einer andern, z. B. nach der gerade entgegengesetzten Seite, da alle wegen der Symmetrie der Figur ganz gleich berechtigt sind. Nun haben wir aber S. 8. §. 1. gesehn, dass wenn mehrere Kräfte sich das Gleichgewicht halten, jede einzelne Kraft gleich und gerade entgegengesetzt der Resultante der übrigen ist; also kann hier z. B. die in der Richtung AL wirkende Kraft P als die der Resultante der beiden nach AM und AN wirkenden Kräfte P gleiche und entgegengesetzte betrachtet werden. Repräsentiren daher $AB = AC = AD$ die Grösse der Kraft P , so wird, wenn man AB über A hinaus verlängert und $AE = AB$ macht, AE die Resultante von AC und AD sein. Sie halbirt augenscheinlich den Winkel CAD und indem man E mit C und D verbindet, entsteht ein Parallelogramm, in welchem AE eine Diagonale ist. Hierbei ergibt sich beiläufig für den speciellen Fall zweier gleichen, unter einem Winkel von 120° wirkenden Kräfte, dass deren Resultante der Grösse und Richtung nach durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt

wird, welches man aus den Verhältnisslinien der beiden Componenten und dem zwischen den Richtungen derselben liegenden Winkel bilden kann.

Ueber die Grösse der Resultante wird man, um mich so auszudrücken, negative Bestimmung angeben können. Wenn in Fig. I. in den Richtungen AM und AN die Kräfte P und Q wirken, so strebt die Kraft Q mit der ihr innewohnenden Stärke den Punkt A in der Richtung AN fortzubewegen, da aber zu gleicher Zeit die Kraft P ihren Einfluss ausübt und den Punkt A von der Richtung AN abzulenken strebt, so wird sie nicht nur nicht die Wirksamkeit der Kraft Q unterstützen, sondern im Gegentheil deren Intensität schwächen, so dass nicht die ganze Kraft Q , sondern nur ein Theil derselben zur wirklichen Bewegung des Punktes A in der Richtung der Resultante beiträgt. Da dasselbe Raisonnement in Bezug auf die Kraft P gilt, so folgt, dass die Resultante R kleiner als die Summe $P + Q$ der beiden Componenten sein muss. Nur in dem einen Fall, wenn der Winkel $MAN = 0$ ist, wenn also die beiden Richtungen AM und AN zusammenfallen, unterstützen sich die Kräfte geradezu und es wird $R = P + Q$.

Scholie. So wie wir im Verlauf dieses §. gesehen haben, dass jede zwei Kräfte, die auf einen Punkt wirken, sich in eine einzige zusammensetzen lassen, deren Richtung innerhalb des kleinern Winkels liegt, welchen die Richtungen der beiden gegebenen Kräfte mit einander bilden, ebenso werden wir auch umgekehrt jede einzelne Kraft als die Resultante von zwei andern betrachten können oder wir werden jede Kraft in zwei andre Kräfte zerlegt denken können.

§. 3.

Es hat sich im vorigen §. gezeigt, dass zwei Kräfte, welche auf Einen Punkt wirken, deren Richtungen also einen Winkel mit einander bilden, stets eine Resultante haben müssen; es ist nun die nächste Frage, wie es sich mit zwei Kräften verhält, deren Richtungen unter einander parallel sind.

Es mögen Fig. III. A und B zwei auf irgend eine Weise fest und unveränderlich mit einander verbundene Punkte sein, an welchen in den parallelen Richtungen AD und BE die Kräfte P und Q in demselben Sinne wirken. Da nach der Voraussetzung die Verbindungslinie AB starr und

unausdehnbar ist, so wird man an deren Endpunkten zwei in einerlei Richtung mit der Linie, aber in gerade entgegengesetztem Sinn AF und BG wirkende gleiche Kräfte S und T anbringen können, welche, weil sie sich nothwendig das Gleichgewicht halten, durchaus keinen Einfluss auf das ganze System haben können, so dass die Wirkung von P und Q in keinerlei Weise geändert wird, durch das Hinzufügen von S und T . Die jetzt vorhandenen vier Kräfte können wir auf beliebige Weise combiniren. Wir denken uns, dass auf den Punkt A die beiden Kräfte S und P unter dem Winkel FAD wirken. Diese werden sich nach dem vorigen §. in eine Mittelkraft vereinigen lassen, deren Richtung AH innerhalb des Winkels FAD liegt. Ebenso werden sich die beiden am Punkt B wirkenden Kräfte T und Q in eine Mittelkraft vereinigen lassen, deren Richtung BJ innerhalb des Winkels GBE liegt. Die Richtungen dieser beiden Resultanten AH und BJ werden, rückwärts verlängert, sich nothwendig in einem Punkte K treffen müssen. Da wir hier, wie überall, das ganze Punkten- und Liniensystem als in sich unveränderlich fest betrachten, so dass also auch AK und BK starre unausdehnbare Linien sind, so werden (nach S. 8.) die Angriffspunkte der beiden nach AH und nach BJ wirkenden Kräfte nach K übertragen werden können und werden jetzt als zwei auf Einen Punkt wirkende Kräfte in eine einzige Mittelkraft vereinigt werden können, deren Richtung KL innerhalb des Winkels AKB liegt und deshalb die Verbindungslinie AB der Anheftungspunkte der beiden ursprünglich gegebenen Kräfte in einem gewissen Punkte C schneiden wird. Die von A nach K übertragene Kraft AH können wir offenbar wieder in zwei Seitenkräfte zerlegen, deren Grösse und Richtungen wir in diesem Fall auch kennen werden, da wir wissen, wie AH entstanden ist; wir werden nur KM parallel und gleich $AD = P$ und KF' parallel und gleich $AF = S$ zu machen haben. Ebenso wird sich die nach K übertragene Kraft BJ in die beiden Seitenkräfte $KN \nparallel BE = Q$ und $KG' \nparallel BG = T$ zerlegen. Hierdurch reduciren sich die eigentlich in A und B gegebenen Kräfte auf die vier in K wirkenden KM , KN , KF' und KG' . Da die beiden letztern gleich und gerade entgegengesetzt sind, so heben sie sich ohne Weiteres auf und es bleiben nur die beiden erstern KM und KN übrig, die, weil sie beide parallel mit AD und BE sind, in Eine Gerade zusammenfallen und sich also zu $P + Q$ zusammenaddiren, welches somit die Resultante der

beiden gegebenen Kräfte ist. Nun können wir aber den Angriffspunkt dieser Kraft nach einem beliebigen Punkt ihrer Richtung, also auch nach C übertragen und erhalten dadurch zunächst diesen, noch nicht ganz erschöpfenden Lehrsatz:

Wenn auf die Endpunkte einer starren unausdehnbaren Linie (AB) zwei Kräfte (P und Q) in unter sich parallelen Richtungen (AD und BE) wirken, so haben diese eine Resultante und zwar ist deren Grösse gleich der Summe ($P+Q$) und deren Richtung parallel der gemeinsamen Richtung der beiden gegebenen Kräfte, ihr Angriffspunkt (C) liegt auf der Verbindungslinie der beiden ersten Angriffspunkte (A und B) und zwar zwischen beiden.

Es fehlt jetzt noch die Bestimmung der Lage des Anheftungspunkts C der Resultante in Bezug auf die Anheftungspunkte (A und B) der beiden Componenten. In einem speciellen Fall kann man diese Frage ohne Schwierigkeit beantworten. Sind nämlich die beiden Kräfte P und Q einander gleich, so werden natürlich die beiden partiellen Resultanten AH und BJ an beiden Punkten A und B symmetrisch gegen ihre Componenten liegen, d. h. es werden die Winkel $FAH = GBJ$ und $DAH = DBE$ sein, also auch deren respective Scheitel- und correspondirenden Winkel: $KAB = KBA$ und $AKC = BKC$, mithin wird das Dreieck AKB ein gleichschenkliges und KC ist darin eine Linie, welche den Winkel an der Spitze halbt, und hieraus folgt, dass durch diese Linie auch die Grundlinie halbt werden muss, dass also $AC = BC$ sein muss. Sind daher die beiden an den Enden einer starren Linie wirkenden Parallel-Kräfte einander gleich, so liegt der Anheftungspunkt ihrer Resultante in der Mitte zwischen beiden; diese Resultante ist das Doppelte der einen Componente und parallel damit.

Ohne weiteres Raisonnement ergibt sich hieraus unmittelbar folgende Erweiterung dieses Satzes:

Wenn man eine beliebige gerade Anzahl parallel wirkender Kräfte hat, von welchen je zwei immer unter einander gleich und symmetrisch in gleichen Entfernungen von der Mitte einer geraden Linie angebracht sind, so ist ihre

gemeinsame Resultante gleich der Summe aller, ihre Richtung parallel der gemeinsamen Richtung der einzelnen Kräfte und ihr Anheftungspunkt die erwähnte Mitte der Linie.

Scholie. Dieser Satz lässt sich offenbar umkehren: Man kann jede Kraft in so viele Paare gleicher mit ihr paralleler Kräfte zerlegen, als man will, wenn ihre Anheftungspunkte nur symmetrisch um den Anheftungspunkt der gegebenen Kraft liegen und ihre Gesamtsumme gleich dieser ursprünglichen Kraft ist.

Um nun im Allgemeinen den Anheftungspunkt der Resultante zweier parallelen Kräfte zu finden, so mögen Fig. IV. an der starren unausdehnbaren Linie AB die Kräfte P und Q wirken. Wir unterscheiden hier zwei Fälle, je nachdem die Kräfte P und Q commensurable oder incommensurable Grössen sind. *)

a) Wenn die Kräfte P und Q commensurable Grössen sind, d. h. wenn zwischen ihnen ein rationales Verhältniss $m:n$ stattfindet.

Man theile die gegebene Linie AB in dem Punkte H nach diesem selben Verhältniss, so dass

$$AH: BH = m: n = P: Q$$

Man verlängere AB über A hinaus um $AG = AH$ und über B hinaus um $BK = BH$, dann werden in GH , $2m$ solcher Längeneinheiten enthalten sein, als in KH deren $2n$ sind. Nun kann man sich aber die Kraft P in $2m$ Krafteinheiten zerlegt denken, dann wird die Kraft Q $2n$ Krafteinheiten derselben Gattung enthalten. Nach der obigen Scholie kann man P ersetzen durch die in ihr enthaltenen $2m$ Theile, wenn man sie auf GH symmetrisch um A vertheilt, alle parallel mit AP , und ebenso Q durch die in ihr enthaltenen $2n$ Theile (von derselben Grösse), wenn man sie auf KH symmetrisch um B vertheilt, alle parallel mit BQ ,

*) Dieser Unterschied zwischen commensurablen und incommensurablen Grössen müsste, streng genommen, bei den meisten der nachfolgenden Untersuchungen gemacht werden; da aber die jedesmalige detaillirte Durchführung zu viel Zeit und Papier wegnehmen und ausserdem mehr oder weniger immer eine Wiederholung sein würde, da die Methode sich ziemlich gleich bleibt, so wird es hinreichen, diese Unterscheidung bei dem gegenwärtigen Fundamentalsatz vollständig durchzuarbeiten.

also auch parallel mit AP . Auf diese Weise sind an der Linie GK in immer gleichen Entfernungen lauter unter sich gleiche parallele Kräfte in der Anzahl $(2m + 2n)$ angebracht, deren Resultante nach dem letzten Satz in der Mitte von GK d. h. in C liegt. Nun ist aber

$$AB = GC$$

weil jedes die Hälfte von GK ist; und wenn man hiervon abzieht

$$AC = AC$$

so bleibt

$$BC = AG = AH;$$

ebenso wird

$$AC = BK = BH$$

mithin

$$BC : AC = AH : BH$$

$$= m : n$$

$$= P : Q$$

d. h. der Anheftungspunkt C der Resultante theilt die Linie AB nach dem umgekehrten Verhältniss der an ihren Endpunkten wirkenden Kräfte.

b) Wenn die Kräfte P und Q incommensurable Grössen sind, also das zwischen ihnen stattfindende Verhältniss nur in irrationalen Zahlen ausgedrückt werden kann.

Zunächst wird man die Richtigkeit des folgenden Hilfssatzes leicht einsehn:

Hilfssatz. Wenn man irgend zwei parallele Kräfte P und Q (gleichgiltig, ob commensurabel oder incommensurabel) mit ihren Anheftungspunkten A und B und deren Resultante R' mit ihrem, von irgend einem Wege her bekannten, Anheftungspunkt C hat, und wenn man die eine der beiden Seitenkräfte, z. B. Q , um irgend eine Kraft, die S heissen mag, vergrössert, so wird die Resultante von P und $Q + S$ ihren Anheftungspunkt zwischen C und B haben.

Denn um die Resultante von P und $Q + S$ zu erhalten, denke man sich erst die Resultante R' von P und Q , welche in C angebracht ist und dann die Resultante von R' und S , so muss diese nach dem ersten Satz in diesem §. zwischen C und B fallen.

Nehmen wir jetzt in Fig. IV. die Kräfte incommensurabel, so theilen wir die Linie AB nach demselben irrationalen Verhältniss, was natürlich ausführbar ist, da das irrationale Verhältniss der Kräfte als durch incommensurable Linien gegeben gedacht werden kann; wir theilen also AB so, dass

$$AC : BC = Q : P$$

und behaupten nun, dass C der Anheftungspunkt der Resultante R seyn, müsse. Gesetzt dieser Punkt wäre nicht der richtige, so möge es der, natürlich um eine endliche Grösse davon entfernte Punkt L sein (der hier zufällig nach B hin liegend angenommen ist; wenn er nach der andern Seite hin angenommen wird, gestaltet sich das Raisonement offenbar ganz ähnlich). Man wird nun offenbar AB in eine Anzahl gleicher Theile theilen können, welche kleiner als die als endliche Grösse angenommene Entfernung von C bis L ist, so dass wenigstens ein Theilungspunkt zwischen C und L etwa nach J fällt. Dann werden AJ und BJ commensurabel sein und es wird der Punkt J betrachtet werden können als der Anheftungspunkt der Resultante zweier Kräfte P und Q' (in A und B), welche nach der vorigen Nr. a. dieser Gleichung genügen:

$$AJ : BJ = Q' : P$$

es war aber

$$AC : BC = Q : P$$

Hieraus wird:

$$Q = \frac{P \cdot AC}{BC} \text{ und } Q' = \frac{P \cdot AJ}{BJ} = P \cdot \frac{AC + CJ}{BC - CJ}$$

oder

$$Q = P \cdot \frac{AC \cdot BC + AC \cdot CJ}{BC \cdot \{BC - CJ\}}$$

und

$$Q' = P \cdot \frac{AC \cdot BC + BC \cdot CJ}{BC \cdot \{BC - CJ\}}$$

also $Q' > Q$.

Es war aber L als der Anheftungspunkt der Resultante von P und Q angenommen, also müsste, nach dem angeführten Hilfssatz, der Anheftungspunkt der Resultante von P und der grössern Q' zwischen L und B fallen, er soll aber in J liegen. Dieses ist ein Widerspruch. Es ist daher nicht erlaubt anzunehmen, dass der Anheftungspunkt von P und Q in einen solchen Punkt, wie L falle, der von dem oben definirten Punkt C verschieden ist.

Fassen wir nun Alles, was bisher in diesem §. gesagt ist, zusammen, so erhalten wir folgendes

Theorem. Wenn an den Endpunkten einer starren unausdehnbaren Linie zwei parallele Kräfte in demselben Sinne wirken, so lassen sich diese in eine einzige Kraft

zusammensetzen, welche gleich ist ihrer Summe, mit ihnen in paralleler Richtung und in demselben Sinne wirkt, und deren Anheftungspunkt auf der gegebenen starren Linie so liegt, dass diese nach dem indirecten Verhältniss der an den Endpunkten wirkenden Kräfte getheilt wird, oder so, dass die Producte aus jeder Kraft in den anliegenden Abschnitt der Linie zu beiden Seiten dieses Punktes gleich sind.

Wenn in dem Punkte C (Fig. IV.) statt der Kraft $R' = P + Q$ eine gleiche aber in gerade entgegengesetztem Sinn wirkende Kraft R angebracht wird, oder wenn der Punkt unterstützt wird, so dass er nicht nach unten entweichen kann, so werden dadurch die Kräfte P und Q im Gleichgewicht gehalten werden. Man nennt aber bekanntlich dieses ganze Liniensystem einen zweiarmigen Hebel, AC und BC die Hebelarme, C den Unterstützungspunkt. Das obige Theorem ist das sogenannte Princip des Hebels, welches sich dann einfacher auf folgende Aussprache reducirt:

Zwei an einem zweiarmigen Hebel wirkende parallele Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn die Producte aus Kraft in Hebelarm zu beiden Seiten des Unterstützungspunktes einander gleich sind.

Aber auch diese Fassung kann man noch ändern und in bessere Uebereinstimmung mit dem weiteren Verlauf der Untersuchungen bringen. Denn wenn man von dem Unterstützungspunkt C Perpendikel $CD = p$ und $CE = q$ auf die Richtungen der beiden Kräfte P und Q fällt, so ist offenbar

$$AC:BC = CD:CE = p:q$$

mithin nach obigem Haupttheorem

$$p:q = Q:P$$

$$\text{oder } P.p = Q.q$$

Nun nennt man aber im Allgemeinen das Product aus einer Kraft in die senkrechte Entfernung eines Punktes von der Richtung der Kraft das Moment der Kraft in Bezug auf diesen Punkt. Hiernach lautet das Princip des Hebels jetzt so:

Zwei an einem zweiarmigen Hebel wirkende parallele

Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn ihre Momente in Bezug auf den Unterstützungspunkt einander gleich sind. *)

§. 4.

Wenn in dem System Fig. IV. die beiden in Einem Sinn wirkenden parallelen Kräfte P und Q als gegeben angenommen werden, so wird ihnen, wie wir gesehen haben, das Gleichgewicht gehalten durch eine Kraft $R = P + Q$, welche in entgegengesetztem Sinne und in solcher parallelen Richtung wirkt, dass deren Entfernungen p und q von den Richtungen der beiden Kräfte sich durch die Gleichung $P \cdot p = Q \cdot q$ bestimmen. Wir können aber auch die Kräfte P und R als gegeben annehmen und deren Wirkung wird dann durch die Kraft $Q = R - P$ das Gegengewicht gehalten.

*) Es dürfte nicht uninteressant sein einen ganz eigenthümlichen, ich möchte fast sagen materiellen Beweis des Satzes vom Hebel hier mit anzuführen, welchen ein holländischer Mathematiker *Simon Stevin* (Ende des 16. und Anfang des 17. Jahrhunderts) in seiner Statik gegeben hat.

Man denke sich Fig. V. einen materiellen Stab AB , der durchgängig homogen, überall gleich stark und gleich schwer ist, so wird dieser offenbar in Ruhe sein, wenn er in seiner Mitte C unterstützt oder aufgehängt ist. Wenn man nun die Linie DE , gleich der halben Länge des Stabes AB , auf unwandelbare Art in den willkürlichen Punkten H und J mit diesem Stabe verbunden denkt, wobei DE zwar als starre unausdehnbare, aber dennoch als mathematische Linie d. h. ohne Schwere angenommen wird, so wird der Stab auch noch in Ruhe bleiben, wenn der Anheftungspunkt der unterstützenden oder aufgehängenden Kraft von C nach irgend einem Punkt ihrer Richtung, also etwa nach K verlegt wird. Macht man darauf $HG = HA$, wodurch auch, weil $DE = \frac{1}{2} AB$ ist, $JG = JB$ wird und schneidet den Stab bei G durch, so wird alles im ungestörten Gleichgewicht bleiben, denn die durchweg homogene Masse AG ist in ihrer Mitte H und ebenso BG in der Mitte J aufgehängt, und somit in Ruhe gehalten. Nun ist

$$AC = DE$$

also

$$AH = \frac{1}{2} AG = KE$$

und

$$BC = ED$$

also

$$BJ = \frac{1}{2} BG = KD,$$

mithin wird

$$\frac{1}{2} AG : \frac{1}{2} BG = KE : KD$$

oder

$$AG : BG = KE : KD.$$

Es stellen aber hier AG und BG Theile des massiven Stabs, also Gewichte oder Kräfte vor, während KE und KD Hebelarme des in K unterstützten Hebels sind; sonach enthält diese Gleichung das Princip des Hebels.

ten. Zur Bestimmung der Entfernung $(p + q)$ der Richtung dieser Resultante *) von der Kraft P erhält man aus

$$P : Q = q : p$$

$$(P + Q) : Q = (p + q) : p \text{ oder } R : (R - P) = (p + q) : p$$

also $p + q = \frac{R \cdot p}{R - P}$ und $q = \frac{P \cdot p}{R - P}$

Wir werden also unter allen Umständen für zwei parallele Kräfte, mögen sie in gleichem oder in entgegengesetztem Sinn wirken, die Resultante und deren Entfernung von der einen der gegebenen Kräfte finden können. Wir lassen hier aber den einen speciellen Fall, dass die beiden gegebenen parallelen Kräfte, wenn sie im entgegengesetzten Sinn und nicht auf denselben Punkt wirken, einander gleich sind, gänzlich ausser Beachtung, da dieser später, im §. 6 noch besonders behandelt werden soll.

Wenn man erst kennen gelernt hat, wie man zwei parallele Kräfte in eine Resultante zusammensetzen kann, so wird man auch sehr leicht die umgekehrte Aufgabe lösen können, nämlich, jede Kraft in zwei parallele Seitenkräfte zu zerlegen. Denn wären z. B. ausser der Kraft R noch die Anheftungspunkte der beiden gesuchten Seitenkräfte, also p und q gegeben, so wären diese Kräfte selbst: $P = \frac{q R}{p + q}$ und $Q = \frac{p R}{p + q}$; oder wäre neben R noch eine der andern Kräfte, etwa Q mit ihrem Anheftungspunkt gegeben, so würde man die andre Composante und deren Anheftungspunkt finden: $P = R - Q$ und $p = \frac{q \cdot Q}{R - Q}$.

Ferner wird sich der Satz von der Zusammensetzung zweier parallelen Kräfte leicht auf jede beliebige Anzahl ausdehnen lassen. Wenn nämlich irgend eine Anzahl paralleler Kräfte $P_1 P_2 P_3 \dots$ gegeben ist, welche auf ein System von unter sich fest verbundenen Punkten wirken,

*) Das Wort Resultante soll im Folgenden nicht immer in seinem strengsten Sinn, d. h. als Vertreterin der Gesamtwirkung mehrerer Kräfte genommen werden, sondern es soll auch darunter, nur der kürzern Aussprache wegen, diejenige Kraft verstanden werden, welche gleich und gerade entgegengesetzt der eigentlichen Resultante ist. Missverständnisse entstehen dadurch in der Regel nicht; sollte dieses möglich sein, so wird jederzeit eine nähere Bestimmung hinzugefügt werden.

so vereinigt man zuerst P_1 und P_2 zu $P_1 + P_2$, angebracht in einem nach den Früheren bestimmten Punkt der Verbindungslinie der Anheftungspunkte der beiden Kräfte P_1 und P_2 ; indem man diesen neuen Punkt mit dem Anheftungspunkt der dritten Kraft P_3 durch eine gerade Linie verbindet, bestimmt man auf dieser den Anheftungspunkt der Resultanten $P_1 + P_2 + P_3$ von $P_1 + P_2$ und P_3 u. s. w. f. Dadurch erhält man als Gesamt-Resultante die Summe sämtlicher gegebenen parallelen Kräfte, wobei man aber wohl darauf achten muss, diejenigen Kräfte, welche in dem einen Sinne wirken, als positiv, dagegen die in entgegengesetztem Sinn wirkenden als negativ zu nehmen; so dass man also auch sagen kann: die Resultante mehrerer parallelen Kräfte ist gleich dem Ueberschuss der Summe der Kräfte, welche in dem einen Sinn wirken, über die Summe der Kräfte, welche in dem gerade entgegengesetzten Sinn wirken. Der specielle Fall, dass beide Summen einander gleich sind und nicht zufällig auf einen und denselben Punkt wirken, wo sie sich dann geradezu gegen einander heben, soll hier ebenfalls, wie schon oben bemerkt, für den gegenwärtigen Augenblick unbeachtet bleiben.

Eine beiläufige Bemerkung, die im weitem Verlauf der Untersuchung von Wichtigkeit wird, mag hier noch ihre Stelle finden, da sie sich unmittelbar an das Gesagte anknüpft. Wenn man ein System von parallelen Kräften hat, welche auf eine Verbindung von Punkten wirken, so findet man nach dem vorhin Gesagten einen gewissen Anheftungspunkt ihrer Resultante. Denkt man sich nun die Richtungen sämtlicher Kräfte geändert, aber so dass sie in ihrer neuen Lage wieder alle unter einander parallel sind, während die Stärke der einzelnen Kräfte, so wie auch deren Anknüpfungspunkte ungeändert dieselben bleiben, so wird auch der Anknüpfungspunkt der Resultante bei dieser geänderten Lage derselbe als der frühere sein, da derselbe nur von der gegenseitigen Entfernung der Anknüpfungspunkte der einzelnen Kräfte und von dem Verhältniss der Grösse dieser Kräfte abhängig ist. Die Resultante geht also bei allen möglichen Lagen des Systems, wenn die einzelnen Kräfte nur stets unter einander parallel sind, durch einen und denselben Punkt. Dieser Punkt heisst der Mittelpunkt der parallelen Kräfte, welcher eine besondere Bedeutung erhält bei der Untersuchung über den Schwerpunkt.

§. 5.

Wir haben in §. 2 gesehen, dass zwei auf einen Punkt wirkende Kräfte eine Resultante haben, welche auf denselben Punkt wirkt, und dass deren Richtung innerhalb des kleinern, von den Richtungen der beiden gegebenen Kräfte gebildeten, Winkels falle, wie aber dieser Winkel getheilt wird und in welchem Verhältniss die Grösse der Resultante zu der der beiden Componenten stehe, soll jetzt mit Hilfe des in §. 3. entwickelten Principes des Hebels für parallele Kräfte bestimmt werden.

Es mögen in Fig. VI. die beiden Kräfte P und Q auf den Punkt A wirken und es mögen AB und AC die Verhältnisslinien der beiden Kräfte sein, so mache man $CE = AB$ und ziehe EF parallel mit AB . Denkt man sich nun in der Richtung dieser Linie in F die Kraft Q' und in E in gerade entgegengesetztem Sinn die Kraft Q'' angebracht, beide unter einander und auch der Kraft Q gleich, so wird dadurch Nichts in dem ganzen System geändert werden, wenn, wie immer, das ganze Liniennetz als ein starres unausdehnbares betrachtet wird, und wird daher die Resultante der vier Kräfte P, Q, Q', Q'' dieselbe sein als die der beiden Kräfte P und Q . Denkt man sich nun (was nach §. 1. S. 7 gestattet ist) die Kraft Q statt in A jetzt in E angebracht, so wirken auf den Punkt E die beiden unter sich gleichen Kräfte Q und Q'' , deren Resultante T (nach §. 2. S. 9) QEQ'' halbiren wird. Wenn man ebenso die Kraft P statt in A jetzt in B angeheftet denkt, so hat man an den Endpunkten der starren Linie BF die beiden parallelen Kräfte P und Q' wirkend, deren Resultante S (nach §. 3. S. 15) ihren Anheftungspunkt in D hat, wenn dieser die Linie BF so theilt, dass

$$\begin{aligned} BD:FD &= Q':P \\ &= Q:P \\ &= AC:AB \end{aligned}$$

ist. Es ist aber ersichtlich, dass D die Spitze eines Parallelogramms ist, welches man aus AB und AC , den Verhältnisslinien der beiden Kräfte P und Q und aus dem zwischenliegenden Winkel A bildet. Hierbei ergibt sich ferner, da $CE = AB$ gemacht wurde, also auch $= CD$ ist, dass die Figur $CDFE$ ein Rhombus ist, dass also die vorhin gefundene Richtung der partiellen Resultante T rückwärts verlängert durch D geht. Denkt man sich nun diese Kraft T statt in E jetzt in D angeheftet, so haben

wir statt der frühern vier Kräfte P , Q , Q' , Q'' oder statt der beiden ursprünglichen Kräfte P und Q die beiden neuen Kräfte S und T , welche beide auf den Punkt D wirken, deren Resultante R also auch durch denselben Punkt D gehn muss. Dieses muss aber stets stattfinden, wie gross oder wie klein die Verhältnisslinien AB und AC auch angenommen werden mögen. Die bei den verschiedenen Verhältnissgrössen entstehenden Parallelogramme werden alle dem Parallelogramm $ABDC$ ähnlich sein und nach einem, dem so eben angestellten analogen Raisonement, wird die Resultante immer durch den Angriffspunkt A und durch die gegenüberliegende Ecke des Parallelogramms gehn. Da alle diese Ecken in einer geraden Linie liegen, so haben wir zunächst diesen Satz: Wenn zwei Kräfte P und Q unter einem Winkel BAC auf einen Punkt A wirken, so trage man auf ihren Richtungen die Verhältnisslinien AB , AC ihrer Stärke auf, vollende das Parallelogramm $ABDC$, dann ist die Diagonale AD die Richtung ihrer Resultante.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar folgender

Zusatz: Wenn man die Richtungen AP und AQ zweier Kräfte und auch die Richtung AR ihrer Resultante kennt, so wird man sogleich das Verhältniss der Stärke der beiden Componenten finden können, wenn man von einem beliebigen Punkt D der Richtung der Resultante Parallele DC und DB mit den Richtungen der beiden Kräfte P und Q zieht; es werden alsdann die dadurch abgeschnittenen Stücke AB und AC die Verhältnisslinien der beiden P und Q sein.

Um nun auch noch die Verhältnisslinie der Grösse der Resultante R zu bestimmen, denke man sich die Diagonale DA über A hinaus nach AM hin verlängert und denke in dieser Richtung und in diesem Sinn die ihrer Grösse nach noch unbekannte Kraft R angebracht, so werden diese drei Kräfte P , Q , R sich das Gleichgewicht halten und man wird jede einzelne von ihnen, z. B. Q , als die Resultante der beiden übrigen P und R betrachten können. Verlängert man nun die Richtung der Kraft Q über A hinaus nach AN , so wird dieses die Richtung der Resultante der beiden nach AP und AM wirkenden Kräfte. Zieht man nun nach dem vorhin angeführten Zusatz von einem Punkt auf AN und zwar von G aus, wenn beiläufig $AG=AC$ gleich der Verhältnisslinie der Kraft Q ist, eine

Parallele mit AM , so trifft diese die AP in dem Punkt B , so dass AB die frühere und auch die jetzige Verhältnisslinie der Kraft P ist. Es wird aber ferner, wenn man GH parallel mit AB zieht, AH die Verhältnisslinie der Kraft R , so dass P sich zu R verhält, wie AB zu AH und da $AG=AC$ und, wie leicht aus der Construction ersichtlich, $AH=BG=AD$ ist, so folgt

$$P:Q:R=AB:AC:AD$$

d. h. wir erhalten jetzt folgenden allgemeinen, unter dem Namen des Princips des Parallelogramms der Kräfte bekannten

Satz: Wenn zwei auf einen Punkt A wirkende Kräfte P und Q durch die Verhältnisslinien AB und AC repräsentirt werden, so stellt die Diagonale AD des aus jenen beiden Kräften und dem zwischenliegenden Winkel ihrer Richtungen gebildeten Parallelogramms $ABDC$, sowohl der Richtung als der Grösse nach die Resultante dar. *)

*) Wegen der Wichtigkeit dieses Satzes soll hier noch ein anderer Beweis desselben und zwar, der Hauptsache nach, ebenso wie ihn Poisson in seinem *Traité de mécanique* gegeben hat, mitgetheilt werden.

Es mögen in Fig. VII. auf den Punkt M in den Richtungen MA und MB die beiden gleichen Kräfte P wirken, so wird die Richtung der Resultante R die Linie AD sein, welche (nach S. 10.) den Winkel $AMB=2x$ halbt, so dass $AMD=BMD=x$ ist. Die Grösse der Resultante R wird offenbar abhängig sein von der Grösse der Composante P und von dem Winkel $2x$, so dass wir mit vollem Recht setzen dürfen $R=F(P, x)$. Da R und P nicht absolut bestimmte Grössen sind, sondern nur, was man auch für eine Mass-einheit der Kräfte wählen mag, ihr gegenseitiges Verhältniss dasselbe bleiben muss, so folgt, dass, da in obiger Gleichung die linke Seite vom ersten Grad in Bezug auf R ist, wegen der erforderlichen Homogenität einer Gleichung, auch die rechte Seite die Grösse P nur in der ersten Potenz und als gemeinsamen Factor enthalten muss.

Hiernach werden wir zu setzen haben: $R=P \cdot f(x)$, oder wenn man, wie es für gegenwärtige Untersuchung passender ist, $f(x)=2 \cdot \varphi(x)$ setzt:

$$R=2P \cdot \varphi(x).$$

Man kann sich nun aber jede der beiden Kräfte P als die Resultante zweier unter einander gleichen Kräfte Q denken, wenn nur die Richtungen dieser beiden letztern, einer Seits MA' und MA'' mit MA und andrer Seits MB' und MB'' mit MB gleiche Winkel bilden. Dieser Winkel $A''MA=AMA' =$

Die gefundene Proportion $P:Q:R=AB:AC:AD$ wird sich mit Hilfe geometrischer Anschauung auch noch in eine andre Form bringen lassen; da nämlich $AB=CD$ ist, so wird:

$B'MB=BMB''$ soll z heissen. Alsdann wird man die Kraft R entweder als die Resultante der beiden Kräfte P oder als die Resultante der vier gleichen Kräfte Q betrachten können.

Es ist aber die Kraft P , als Resultante der beiden gleichen Kräfte Q , nach dem Obigen offenbar:

$$P=2Q \cdot \varphi(z),$$

also wird:

$$R=4Q \cdot \varphi(x) \cdot \varphi(z).$$

Nun kann man sich ferner die beiden Kräfte Q , welche in den Richtungen MA' und MB' wirken, in eine Resultante R' vereinigt denken, deren Richtung MD sein muss und deren Grösse, analog, durch

$$R'=2Q \cdot \varphi(x-z)$$

ausgedrückt wird.

Ebenso werden die beiden Kräfte Q , welche in den Richtungen MA'' und MB'' wirken, sich in eine ebenfalls nach MD gerichtete Resultante R'' vereinigen, deren Grösse ausgedrückt ist durch

$$R''=2Q \cdot \varphi(x+z).$$

Da nun aber R sowohl, als R' und R'' in derselben Richtung MD wirken, so muss offenbar:

$$R=R'+R''$$

sein, woraus sich nach Einsetzung der angegebenen Werthe und nach Division durch $2Q$ folgende Bedingungsgleichung zur Bestimmung der Natur der Function φ ergibt:

$$2\varphi(x) \cdot \varphi(z) = \varphi(x-z) + \varphi(x+z).$$

Nun kennen wir aber aus der Gleichung $R=2P \cdot \varphi(x)$, weil (nach S. 12) die Resultante R stets kleiner als $2P$ sein muss, für die Natur der Function noch diese wesentliche Bestimmung, dass $\varphi(x)$ stets zwischen 0 und 1 liegt, so dass man stets einen Winkel w wird angeben können, der zwischen 0° und 90° liegt, von der Art, dass $\varphi(x)=\cos w$ wird.

Nach S. 10 und S. 11 wird für die speciellen Fälle $x=0^\circ$ und $x=60^\circ$, respective $R=2P$ und $R=P$, also ergibt sich, im Vergleich mit der allgemeinen Bedingung $R=2P \cdot \varphi(x)$, beziehlich:

$$\varphi(x) = \varphi(0^\circ) = 1$$

$$\varphi(x) = \varphi(60^\circ) = \frac{1}{2};$$

da wir aber $\varphi(x)$ gleich dem Cosinus eines Winkels w gesetzt haben, der kleiner als ein Rechter ist, so wird entsprechend

oder da die drei letztern Linien die Seiten eines Dreiecks sind, welche

$$w = 0^0$$

$$\text{und } w = 60^0$$

d. h. in beiden Fällen $w = x$.

Wir müssen aber, um weiter schliessen zu können, zunächst beweisen, dass wenn für einen speciellen Werth von $x = \alpha$ die Function $\varphi(\alpha) = \cos \alpha$ ist, sich dieselbe Natur der Function für eine ganze Reihe von Werthen des x ergibt. Wir setzen deshalb in der allgemeinen Bestimmungsgleichung

$$2 \varphi(x) \cdot \varphi(z) = \varphi(x-z) + \varphi(x+z)$$

$x+z = \alpha$ und $x-z = 0$, so wird:

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\varphi(0) + \varphi(\alpha)}{2}}$$

wo bei der Wurzelauziehung nur das positive Zeichen zu nehmen ist, da nach einer vorhin gemachten Bemerkung $\varphi(x)$ stets positiv, zwischen 0 und +1 liegt. Da nun $\varphi(0) = \cos 0^0 = 1$ und $\varphi(\alpha) = \cos \alpha$ angenommen ist, so wird:

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \cos \frac{1}{2} \alpha.$$

Hieraus folgt: wenn für irgend einen speciellen Werth α des Elements von $\varphi(x)$ die Natur der Function φ der Cosinus dieses Elements ist, so findet dasselbe auch bei halb so grossem Element statt; durch wiederholte Anwendung desselben Schlusses erhält man daher allgemein:

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

Setzt man nun für den Augenblick $\frac{\alpha}{2^n} = \beta$, wobei wir wissen, dass β ein solcher Werth des Elements x ist, dass $\varphi(x) = \varphi(\beta) = \cos \beta$ wird, und setzen wir ferner in unsre allgemeine Bestimmungsgleichung $x = z = \beta$, so gibt diese:

$$2 \overline{\varphi(\beta)}^2 = 1 + \varphi(2\beta)$$

$$\text{d. h. } 2 \cos^2 \beta = 1 + \varphi(2\beta)$$

$$\text{mithin } \varphi(2\beta) = \cos 2\beta$$

Hieraus schliessen wir wieder, wenn für irgend einen bestimmten Werth β des Elements x die Natur der Function φ der Cosinus dieses Elements ist, dass dasselbe auch beim doppelten Element satt findet und durch Wiederholung des Schlusses allgemein:

$$\varphi(m\beta) = \cos m\beta$$

oder da $\beta = \frac{\alpha}{2^n}$

$$\varphi\left(\frac{m\alpha}{2^n}\right) = \cos \frac{m\alpha}{2^n}$$

natürlich in demselben Verhältniss unter einander stehn, wie die Sinus der Gegenwinkel:

Setzen wir ferner $\frac{m\alpha}{2^n} = \gamma$, so ist γ ein solcher Werth des Elements x , dass $\varphi(x) = \varphi(\gamma) = \cos \gamma$ ist; und setzen wir nun in der allgemeinen Bestimmungsgleichung $x = \frac{2}{3}\gamma$, $z = \frac{1}{3}\gamma$ und berücksichtigen dabei, dass $\varphi(\frac{2}{3}\gamma) = 2 \cdot \overline{\varphi(\frac{1}{3}\gamma)^2} - 1$ ist, so erhalten wir

$$4 \cdot \overline{\varphi(\frac{1}{3}\gamma)^3} - 3 \cdot \varphi(\frac{1}{3}\gamma) = \cos \gamma.$$

Diese Gleichung hat bekanntlich drei reelle Wurzeln:

$$\begin{aligned} \varphi(\frac{1}{3}\gamma) &= \cos \frac{1}{3}\gamma \\ &= \cos(120^\circ + \frac{1}{3}\gamma) \\ &= \cos(240^\circ + \frac{1}{3}\gamma) \end{aligned}$$

Da aber einer Seits γ nie grösser als 90° , $\frac{1}{3}\gamma$ also nie grösser als 30° werden kann und da anderer Seits $\varphi(x)$ stets positiv sein muss, so werden für vorliegende Untersuchung die beiden letzten Wurzeln keine Gültigkeit haben und man erhält den einzigen Werth $\varphi(\frac{1}{3}\gamma) = \cos \frac{1}{3}\gamma$, oder nach Wiederholung desselben Schlusses $\varphi\left(\frac{\gamma}{3^p}\right) = \cos\left(\frac{\gamma}{3^p}\right)$ d. h. nach Einsetzung des Werthes von γ : $\varphi\left(\frac{m\alpha}{2^n \cdot 3^p}\right) = \cos\left(\frac{m\alpha}{2^n \cdot 3^p}\right)$.

Wir könnten mit Leichtigkeit dieses Raisonnement in derselben Art fortsetzen und dadurch noch Potenzen von 5, 7 und von allen möglichen Primzahlen in den Nenner bringen. Die Rechnung wirklich weiter zu verfolgen, wäre überflüssig, es ist hinreichend die Möglichkeit und Ausführbarkeit derselben einzusehn, und wir dürfen sonach geradezu folgenden Satz aussprechen:

Wenn man irgend einen Werth $x = \alpha$ von der Art kennt, dass man behaupten kann $\varphi(x) = \varphi(\alpha)$ sei gleich $\cos \alpha$, so ist auch $\varphi\left(\frac{m}{2^n \cdot 3^p \cdot 5^q \dots} \cdot \alpha\right) = \cos\left(\frac{m}{2^n \cdot 3^p \cdot 5^q \dots} \cdot \alpha\right)$; nun wissen wir aber, dass für $x = 60^\circ$ die Function $\varphi(60^\circ)$ wirklich $= \cos 60^\circ$ ist, es wird daher auch für

$x = \frac{m}{2^n \cdot 3^p \cdot 5^q \dots} \cdot 60^\circ$ stets $\varphi(x) = \cos x$ sein.

Nun werden aber für die willkürlichen Grössen $m, n, p, q, \dots$ immer solche Zahlenwerthe gefunden werden können, dass durch $\frac{m}{2^n \cdot 3^p \cdot 5^q \dots} \cdot 60^\circ$ jeder beliebige Winkel dargestellt wird, woraus man schliesslich folgert, dass für jedes x :

$$\varphi(x) = \cos x.$$

$$P:Q:R = \sin CAD:\sin ADC:\sin DCA.$$

Da aber

$$\sin CAD = \sin CAH$$

$$\sin ADC = \sin BAD = \sin BAH$$

$$\sin DCA = \sin BAC$$

so wird auch:

$$P:Q:R = \sin CAH:\sin BAH:\sin BAC$$

Wenn also zwei gleiche Kräfte P unter dem Winkel $2x$ auf einen Punkt wirken, so wird ihre Resultante

$$R = 2P \cdot \cos x,$$

d. h. sie ist die Diagonale eines aus den Verhältnisslinien der beiden gleichen Kräfte P und dem zwischenliegenden Winkel $2x$ gebildeten Parallelogramms oder specieller Rhombus.

Hat man nun zweitens zwei ungleiche Kräfte P und Q , welche (Fig. VIII.) auf den Punkt A , zunächst aber noch unter einem rechten Winkel MAN wirken, so seien AB und AC ihre Verhältnisslinien; man vollende das Parallelogramm $ABCD$, ziehe beide Diagonalen, ziehe ferner FG durch A parallel mit BC und BF sowohl als CG parallel mit AD . Bei dieser Construction wird sowohl $AFBE$ als $AGCE$ ein Rhombus und man wird nach dem Vorigen AB oder P als die Resultante der beiden gleichen durch AF und AE dargestellten Kräfte und ebenso AC oder Q als die Resultante der beiden gleichen durch AG und $AE (=ED)$ dargestellten Kräfte betrachten können, so dass wir statt der beiden Kräfte P und Q jetzt die vier Kräfte AF , AE , AG und AE (oder ED) haben. Da sich aber die beiden Kräfte AF und AG unmittelbar gegenseitig aufheben, so reducirt sich die ganze Wirkung auf $AE + AE$ (oder ED) d. h. auf $2 \cdot AE$ oder AD , welches die Diagonale des von P und Q gebildeten Parallelogramms ist.

Hat man endlich drittens (Fig. IX.) zwei ungleiche Kräfte P und Q , welche unter einem beliebigen Winkel MAN auf den Punkt A wirken, so seien AB und AC ihre Verhältnisslinien; man vollende das Parallelogramm $ABDC$, ziehe die Diagonale AD , falle auf sie die Perpendikel CH , BJ und ziehe auch FG senkrecht auf AD , endlich sei noch CG und BF parallel mit AD . Bei dieser Construction wird man nach dem soeben Entwickelten AB oder P als die Resultante von AF und AJ und AC oder Q als die Resultante von AG und $AH (=JD)$ betrachten können, so dass die beiden Kräfte P und Q durch die vier Kräfte AF , AJ , AG und $AH (=JD)$ ersetzt sind. Da sich aber hiervon die beiden Kräfte AF und AG geradezu gegenseitig aufheben, so bleibt als Resultante nur $AJ + AH (=JD)$ oder AD , d. h. die Diagonale des aus P und Q gebildeten Parallelogramms.

d. h. wenn drei auf einen Punkt wirkende Kräfte P , Q , R sich das Gleichgewicht halten, so wird die verhältnissmässige Stärke einer jeden von ihnen durch den Sinus des Winkels repräsentirt, den die Richtungen der beiden andern Kräfte miteinander bilden.

Auch ergibt sich hierbei noch leicht, wenn man von den Endpunkten B und C der beiden Composanten Perpendikel BJ und CK auf die Resultante AD fällt, so wird diese $AD = AJ + JD$

$$= AJ + AK$$

nun sind aber AJ und AK die senkrechten Projectionen von AB und AC auf die Diagonale AD und man kann daher auch diese Ausdrucksweise wählen: Die Resultante zweier Kräfte ist gleich der Summe der senkrechten Projectionen der beiden Composanten auf die Richtung der erstern.

Die obige dreitheilige Proportion liefert auch, wenn man sie in zwei zweitheilige auflöst:

$$P : R = \sin CAD : \sin DCA = \sin CAD : \sin BAC$$

$$C : R = \sin ADC : \sin DCA = \sin BAD : \sin BAC$$

woraus:

$$P = R \cdot \frac{\sin CAD}{\sin BAC}$$

$$Q = R \cdot \frac{\sin BAD}{\sin BAC}$$

Tritt hierbei der specielle Fall ein, dass der Winkel BAC zwischen den Richtungen der beiden Composanten ein rechter ist, so ist dessen Sinus $= 1$ und die beiden Winkel CAD und BAD werden Complementärwinkel; dann kann man diese Werthe so schreiben:

$$P = R \cdot \cos BAD \quad \text{oder} \quad P = R \cdot \sin CAD$$

$$Q = R \cdot \sin BAD \quad Q = R \cdot \cos CAD.$$

Umgekehrt wird man natürlich, mit Hilfe desselben Satzes vom Parallelogramm der Kräfte, jede gegebene Kraft in zwei Seitenkräfte zerlegen können, wenn die Richtungen derselben vorgeschrieben sind.

Ferner wird man jede beliebige Anzahl von Kräften, die in einerlei Ebene auf Einen Punkt wirken, in eine einzige Kraft vereinigen können, indem man zuerst die Resultante der ersten und zweiten Kraft sucht, sodann diese Resultante mit der dritten Kraft vereinigt u. s. w. f.

Man wird auch eine beliebige Anzahl von Kräften, die nach beliebigen

Richtungen im Raume, aber alle auf einen Punkt wirken, nach demselben Satz vereinigen können. Denn da z. B. die Richtungen der ersten und zweiten Kraft sich in dem einen, im gemeinschaftlichen Angriffspunkt schneiden, so wird man sich durch beide eine Ebene gelegt denken können, in welcher dann auch leicht die Resultante und zwar durch denselben Angriffspunkt gehend construirt werden kann. Durch diese Resultante und die dritte Kraft darf man sich dann wieder eine Ebene gelegt denken und hierin wieder eine neue Resultante, u. s. w. f.

Auch umgekehrt wird man irgend eine gegebene Kraft in eine beliebige Anzahl nach vorgeschriebenen Richtungen wirkender Kräfte zerlegen können.

Diese in den letzten Sätzen angedeutete Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte hat aber offenbar etwas Zerfahrenes und Ungeregeltes an sich, und um dieses zu vermeiden, ist man, weil es sich um räumliche Verhältnisse handelt, auf die gebräuchlichen rechtwinkligen Coordinaten-Systeme zurückgegangen.

Wenn irgend eine Kraft P ihrer Grösse und Richtung nach gegeben ist, so muss die erstere Eigenschaft durch eine begrenzte Verhältnisslinie (im Verhältniss zur präsumirten Maass-Einheit der Kraft) und die zweite durch die Winkel α, β, γ , welche die Richtungslinie mit drei rechtwinkligen Coordinatenaxen bildet, bestimmt sein. Nimmt man nun Fig. X. den Anheftungspunkt O der Kraft zum Anfangspunkt des Coordinaten-Systems (was unter allen Umständen geschehen kann, indem man eventuell durch einfache Hinzufügung von Constanten zu den Coordinaten das ursprünglich gewählte Coordinaten-System in ein durch den genannten Anheftungspunkt parallel gelegtes umwandeln kann) und legt man alsdann durch den Endpunkt A der Verhältnisslinie der Kraft P drei Ebenen, die parallel mit den Coordinaten-Ebenen sind, so wird P die Diagonale eines Parallelepipeds, dessen drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten $OB, OC, OD = P \cdot \cos \alpha, P \cdot \cos \beta, P \cdot \cos \gamma$ sind, wenn α, β, γ die respectiven Winkel der Diagonale P mit den drei rechtwinkligen x, y, z Axen bedeuten. Denn wenn man von A das Perpendikel AE auf die xy Ebene fällt und EO und AD zieht, so ist OA Diagonale in dem Parallelogramm $AEOD$ und kann also als Resultante zweier durch OD und OE dargestellten Kräfte betrachtet werden, weiter ist aber auch OE Diagonale in dem

Parallelogramm $OBE C$ und kann wieder als Resultante zweier durch OB und OC dargestellten Kräfte angesehen werden, so dass OA die Resultante der drei rechtwinkligen Kräfte OB, OC, OD oder $P \cos \alpha, P \cos \beta, P \cos \gamma$ ist.

Wirken nun auf den Punkt O mehrere Kräfte $P_1, P_2, P_3, \dots$, deren Richtungen mit den Coordinaten-Axen die Winkel α, β, γ mit dem betreffenden Index bilden, und denken wir jede dieser Kräfte auf die so eben angegebene Weise in drei rechtwinklige Seitenkräfte zerlegt, so erhalten wir in den Richtungen der drei Axen folgende Kräfte:

in der x Axe:

$$P_1 \cos \alpha_1, P_2 \cos \alpha_2, P_3 \cos \alpha_3, \dots$$

in der y Axe:

$$P_1 \cos \beta_1, P_2 \cos \beta_2, P_3 \cos \beta_3, \dots$$

in der z Axe:

$$P_1 \cos \gamma_1, P_2 \cos \gamma_2, P_3 \cos \gamma_3, \dots$$

In jeder Axe kann man die Kräfte, da sie alle in derselben geraden Linie wirken, durch einfache Addition in eine einzige vereinigen, wobei sich die in dem einen Sinn von denen in gerade entgegengesetztem Sinn wirkenden unmittelbar durch das gehörige Vorzeichen unterscheiden werden, wenn man nur darauf achtet, die Neigungswinkel α, β, γ immer in gleicher Weise von 0° bis 360° zu zählen. Hierdurch erhalten wir drei nach den drei rechtwinkligen Axen gerichtete resultirende Kräfte, deren gemeinsamer Angriffspunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist und die wir durch X, Y, Z bezeichnen wollen. Wenn man aus diesen, als Kanten betrachtet, ein Parallelepipedum construirt, so wird die Diagonale desselben, die R heissen mag, ihre Resultante sein und somit zugleich Resultante sämmtlicher ursprünglich gegebener Kräfte P . Bezeichnet man nun noch durch α, β, γ ohne Index die unbekannten Neigungswinkel dieser Resultante R gegen die drei Axen, so hat man offenbar:

$$X = R \cdot \cos \alpha$$

$$Y = R \cdot \cos \beta$$

$$Z = R \cdot \cos \gamma$$

woraus man durch Quadrirung und Addirung erhält:

$$R^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = X^2 + Y^2 + Z^2$$

oder, da bekanntlich $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, weil α, β, γ die drei

Winkel sind, welche eine gerade Linie mit drei rechtwinkligen Coordinaten-Axen bildet:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

welches die Grösse der Resultante R giebt. Die Winkel derselben mit den Axen erhält man alsdann aus den vorigen drei Gleichungen

$$\cos \alpha = \frac{X}{R} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{Y}{R} = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{R} = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Auch erhält man, wenn man dieselben vorigen drei Gleichungen der Reihe nach mit $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ multiplicirt und dann addirt

$$X \cdot \cos \alpha + Y \cdot \cos \beta + Z \cdot \cos \gamma = R \cdot (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

oder wegen der vorhin genannten Bedingungsgleichung:

$$R = X \cdot \cos \alpha + Y \cdot \cos \beta + Z \cdot \cos \gamma$$

d. h. die Resultante ist gleich der Summe der rechtwinkligen Projectionen der drei Componenten auf die Richtung der Resultante.

Diese ganze Entwicklung ist natürlich auch anwendbar auf Kräfte, welche nur in einer Ebene wirken. Nimmt man diese alsdann zur xy Ebene, so hat man in den bisherigen Formeln nur alle γ gleich 90° zu setzen, wodurch deren Cosinusse verschwinden, was auch $Z = 0$ giebt.

§. 6.

Wir haben in §. 4 (S. 19) angemerkt, dass drei unter einander parallele Kräfte P , Q , R im Gleichgewicht sind, wenn $R = P + Q$ und $P \cdot p = Q \cdot q$, wobei P und Q in einerlei Sinn und R in gerade entgegengesetztem Sinn wirken und p und q die respectiven senkrechten oder schiefwinkligen Entfernungen des Anheftungspunkts der Kraft R von den Richtungen der beiden andern Kräfte kedeuten. Es wurde ferner bemerkt, dass jede dieser drei Kräfte, z. B. Q , als diejenige betrachtet werden könne, welche der Wirkung der beiden andern das Gleichgewicht hält. Es fand sich zu deren vollständiger Bestimmung, wobei man also P und R und deren gegenseitigen Abstand p als gegeben ansah, erstlich ihre Grösse

$$Q = R - P$$

und die Entfernung ihres Anheftungspunkts von der Richtung der Kraft R

$$q = \frac{P \cdot p}{R - P}.$$

Wir haben dort den speciellen Fall $R = P$ ausdrücklich ausgeschlossen und dieser soll jetzt einer genauern Betrachtung und Untersuchung unterworfen werden. Wenn wir für P einen fest bestimmten unveränderlichen Werth annehmen, das R aber uns im Zustand der Variabilität denken, und wenn wir dann den Werth dieses R immer mehr und mehr dem Werth des P sich nähern lassen, so sehen wir, dass die Resultante Q immer kleiner, die Entfernung q aber ihres Anheftungspunkts immer grösser wird, bis endlich bei R gleich P , die Resultante $Q = 0$, die Entfernung q aber unendlich gross wird. Hier entsteht die Frage, wie soll man dieses deuten? Entweder könnte man daran denken, dass die beiden gleichen Kräfte R und P sich geradezu das Gleichgewicht halten; dagegen spricht aber, dass nur zwei in gerade entgegengesetztem Sinne wirkende Kräfte einander gleich sind und sich aufheben, wenn sie in einerlei Richtung wirken, was im vorliegenden Fall nicht zutrifft, da wir ausdrücklich eine Entfernung p der Richtungen beider Kräfte angenommen haben. Oder zweitens, jenes Rechnungsergebniss könnte andeuten, dass der Wirkung der beiden gleichen Kräfte R und P nicht durch eine einzige Kraft das Gleichgewicht gehalten werden könne. Und dieses ist in der That das Richtige. Denn bezeichnen wir die beiden gleichen Kräfte mit einerlei Buchstaben P nur mit hinzugefügten verschiedenen Vorzeichen und nehmen wir an, es wäre möglich für sie eine einzige Resultante Q , die in irgend einer gewissen Entfernung q angebracht ist, zu finden, so dass also zwischen $+P$, $-P$, $+Q$ Gleichgewicht stattfände, dann wird ebenso auch, da bei dem System der beiden Kräfte $+P$, $-P$ nach beiden, nach der positiven wie nach der negativen Seite hin Alles vollkommen symmetrisch und identisch ist, die Kraft $-Q$, in derselben Entfernung q wirkend, eine Resultante für $+P$ und $-P$ sein müssen, so dass auch $+P$, $-P$, $-Q$ im Gleichgewicht wären. Nehmen wir nun zunächst das erstere an, dass $+P$, $-P$, $+Q$ im Gleichgewicht seien, so wird dieses offenbar nicht gestört werden, wenn man in derselben Entfernung q die beiden sich selbst vernichtenden Kräfte $+Q$ und $-Q$ hinzufügt, so dass die fünf Kräfte $+P$, $-P$, $+Q$, $+Q$, $-Q$ im Gleichgewicht bleiben.

Nun wurde aber vorhin angemerkt, dass unter der gemachten Voraussetzung sich auch $+P$, $-P$, $-Q$ das Gleichgewicht halten, wodurch dann die beiden in einerlei Sinn wirkenden Kräfte $+Q$, $+Q$ sich gegenseitig aufheben müssten, was offenbar nicht möglich ist. Es wird deshalb nie eine einzelne Kraft geben können, welche der Wirkung der beiden Kräfte $+P$, $-P$ das Gleichgewicht hält; es gibt aber stets deren zwei, welche das Erforderliche leisten. — Bevor wir dieses beweisen, mögen zur Abkürzung im Ausdruck folgende Benennungen hier angemerkt werden.

Zwei Kräfte $+P$, $-P$, welche unter einander gleich, in parallelen Richtungen, in gerade entgegengesetztem Sinn, aber nicht auf einen und denselben Punkt wirken, werden von Poinso^t *une couple* (Koppel) genannt, im Deutschen hat man noch nicht einen ganz allgemein angenommenen Namen dafür, entweder heissen sie ein Kräftepaar oder Parallelpaar oder schlechthin Paar. Die senkrechte Entfernung p der beiden Kräfte nennt man den Hebelarm des Paares oder seine Breite; und das Produkt $P.p$, aus Kraft und Hebelarm, das Moment des Paares. — Als Winkel, unter welchem die Kräfte auf den Hebelarm wirken, soll stets der rechte angenommen werden, obwohl jeder andre ebenso zulässig wäre. — Was die Natur der Bewegung betrifft, welche ein Kräftepaar dem Körper, an welchem es wirkt, mittheilt, so ist augenscheinlich, dass es keine geradlinige oder in einer bestimmten Richtung hin fortstrebende sein kann, weil ihr sonst durch irgend eine einzelne Kraft müsste entgegengewirkt werden können. Um sich irgend eine Vorstellung von der Natur der erzielten Bewegung zu machen, denke man sich auf der Ebene des Paares zwischen den beiden Kräften auf dem Hebelarm stehend und das Auge nach der einen von beiden Kräften gerichtet, so wird diese zu streben scheinen, den Körper, an welchem das Paar wirkt, nach der rechten (oder linken) Seite hin zu drehen, und wenn wir uns so umwenden, dass unser Auge nach der andern Kraft gerichtet ist, so wird auch diese ebenfalls streben den Körper nach derselben rechten (oder linken) Seite hin zu drehen. Man sagt dann, das Kräftepaar habe einen Sinn zum Drehen von der Linken zur Rechten (oder von der Rechten zur Linken). Diesem gemäss spricht man auch von Paaren, die einerlei oder entgegengesetzten Sinn haben. Man muss sich hierbei aber wohl

hüten, an eine wirklich effectuirte Drehung zu denken; denn dazu würde noch ein sehr wesentlicher Umstand, nämlich die Fixirung eines Punkts gehören, um welchen die Drehung stattfände.

Wenn wir nun auch nicht die eigentliche Natur der Wirkung eines Parallelpaares definiren können, so wissen wir doch sicher, dass es irgend eine Wirkung ausübt, weil wir im Stande sind, durch Hinzufügung anderer Kräfte Gleichgewicht herzustellen. Als Fundament hierzu kann man folgenden Satz aufstellen:

Satz. Wenn ein Kräftepaar $(+P, -P)$ und in derselben Ebene an irgend einer beliebigen Stelle eine einzelne Kraft Q (welche nach dem Frühern nie im Gleichgewicht sein können) gegeben sind, so lässt sich immer eine solche Linie $q = \frac{P \cdot p}{Q}$ finden, dass das Kräftepaar $(+Q, -Q)$ an dem Hebelarm q dem ersteren Kräftepaar das Gleichgewicht hält.

Beweis. In Fig. XI. sei das Kräftepaar $(+P, -P)$ an dem Hebelarm $AB = p$ und die Kraft $+Q$ in dem Punkt C gegeben. Es wird behauptet, dass es auf AB einen solchen Punkt E gebe, dass, wenn man von ihm ein Perpendikel $EF = q$ auf die Richtung der Kraft $+Q$ fällt und auch in ihm eine Kraft $-Q$ parallel mit $+Q$ anbringt, die vier Kräfte $+P, -P, +Q, -Q$ im Gleichgewicht sind.

Man verlängere die Richtung der Kraft Q , bis sie AB in dem Punkt D schneidet. Hierhin kann man sich die Kraft Q übertragen und dann in die beiden Kräfte $+T, +S$ zerlegt denken. Die beiden an den Endpunkten von AD wirkenden Kräfte $+P$ und $+S$ werden sich in eine einzige Kraft $+(P+S)$ in dem Punkte M vereinigen, wenn dieser letztere so liegt, dass $P \cdot AM = S \cdot DM$ ist. Wenn man nun einen Punkt E so wählt, dass $S \cdot EM = P \cdot BM$ ist und in E die Kraft $-S$ anbringt, so werden sich die an den Endpunkten von BE wirkenden Kräfte $-P$ und $-S$ in eine einzige, in demselben Punkt M wirkende Kraft $-(P+S)$ vereinigen, welche offenbar der vorigen Kraft $+(P+S)$ das Gleichgewicht hält. Bringt man nun noch in E die Kraft $-T$, gleich und gerade entgegengesetzt der in D erhaltenen zweiten Componenten von Q an, so leuchtet ein, dass die sechs Kräfte $+P, -P, +T, -T, +S, -S$ im Gleichgewicht sind; oder wenn man sowohl in E als in D die beiden Seiten-

kräfte T und S in ihre ursprüngliche Mittelkraft Q vereinigt und die in D angebrachte nach F überträgt, dass die beiden Kräftepaare $(+P, -P)$ am Hebelarm $AB=p$ und $(+Q, -Q)$ am Hebelarm $EF=q$ sich das Gleichgewicht halten. Um die Linien DE und EF näher zu bestimmen, addiren wir die beiden vorhin benutzten Gleichungen:

$$P \cdot AM = S \cdot DM$$

$$P \cdot BM = S \cdot EM$$

wodurch wir erhalten: $P \cdot AB = S \cdot DE$.

Wenn wir aber für einen Augenblick den Winkel EDF durch α bezeichnen, so ist

$$S = Q \cdot \sin \alpha$$

und

$$DE \cdot \sin \alpha = EF$$

also $S \cdot DE \cdot \sin \alpha = Q \cdot EF \cdot \sin \alpha$ oder $S \cdot DE = Q \cdot EF$, mithin:

$$P \cdot AB = Q \cdot EF$$

oder endlich $P \cdot p = Q \cdot q$.

Da der hier erhaltene Werth $q = \frac{P \cdot p}{Q}$ ganz unabhängig von dem Anheftungspunkt und der Richtung der Kraft Q ist, so wird es vollkommen gleichgültig sein, wo und wie die Kraft Q gerichtet ist, wenn sie nur in derselben Ebene mit dem Kräftepaar $(+P, -P)$ liegt. Wo und wie also das Kräftepaar $(+Q, -Q)$ mit dem Hebelarm q in derselben Ebene liegt, wenn es nur in entgegengesetztem Sinn zu drehen strebt als das Kräftepaar $(+P, -P)$ an dem Hebelarm p , so hält es diesem das Gleichgewicht. Dieses heisst doch aber nichts Anderes als: Ein Kräftepaar kann geradezu an jede beliebige Stelle seiner Ebene und in ganz beliebige Richtung gebracht werden, stets übt es dieselbe Wirkung aus.

Ferner wird man aber auch für jede beliebige andre Kraft Q' einen zugehörigen Hebelarm $q' = \frac{P \cdot p}{Q'}$ finden können, so dass das Kräftepaar $(+Q', -Q')$ an diesem Hebelarm q' dem Kräftepaar $(+P, -P)$ an dem Hebelarm p das Gleichgewicht hält. Es wird daher das Kräftepaar $(+Q', -Q')$ am Hebelarm q' dieselbe Wirkung haben, als das Kräftepaar $(+Q, -Q)$ am Hebelarm q . Die wesentliche Bedingung aber, woraus der betreffende Hebelarm bestimmt wurde, war

$$P \cdot p = Q \cdot q$$

und wird im zweiten Fall analog sein:

$$P \cdot p = Q' \cdot q'$$

woraus sich ergibt: $Q \cdot q = Q' \cdot q'$

oder dieser Satz:

Zwei Kräftepaare, die in einerlei Ebene und in einerlei Sinn wirken, sind einander gleich, wenn ihre Momente gleich sind.

Hieran knüpfen sich unmittelbar mehrere wichtige Folgerungen.

1) Wenn man in einer Ebene zwei Kräftepaare $(+P, -P)$ am Hebelarme $AB = p$ und $(+P, -P)$ am Hebelarm $CD = p'$, also beide von gleichen Kräften aber verschiedenen Hebelarmen, dabei in gleichem Sinne wirkend hat, so wird man (wenn in A und C die positiven, in B und D die negativen Kräfte wirken) nach dem Vorigen das zweite Kräftepaar so verlegen können, dass C in B fällt und die beiden Hebelarme eine gerade Linie $AD = p + p'$ bilden; in dem Punkte B wirken aber dann zwei gleiche und gerade entgegengesetzte Kräfte, die sich mithin geradezu aufheben, so dass in A die Kraft $(+P)$ und in D die Kraft $(+P)$ an dem Hebelarm $p + q$ übrig bleiben, welche in ihrer Verbindung die beiden Paare ersetzen. Das Moment dieses neuen Paars ist aber $P \cdot (p + p')$ oder $= P \cdot p + P \cdot p'$ d. h. gleich der Summe der Momente der beiden einzelnen Paare, wodurch sich, wenn wir dasselbe Raisonement auf mehr als zwei Paare in analoger Weise weiterführen, folgender Satz herausstellt:

Wenn mehrere Kräftepaare, welche alle gleiche Kräfte aber verschiedene Hebelarme haben, in einer Ebene gegeben sind, so ist die Gesamtwirkung aller gleich der Wirkung eines einzigen Kräftepaars, an welchem dieselbe Kraft wirkt und dessen Hebelarm gleich der Summe der Hebelarme der einzelnen Paare ist. — Das Moment des resultierenden Kräftepaars ist gleich der Summe der Momente der einzelnen Paare.

Sollten unter den gegebenen Kräftepaaren einige in entgegengesetztem Sinn zu drehn streben, so ist leicht ersichtlich, dass deren Hebelarm als subtractiv auftreten, so wie auch ihre Momente negativ sein werden.

2) Wenn man in einer Ebene zwei Kräftepaare $(+P', -P')$ am Hebelarm $AB = p$ und $(+P'', -P'')$ am Hebelarm $CD = p$, also beide

von verschiedenen Kräften aber gleichen Hebelarmen, dabei in gleichem Sinn strebend hat, so wird man das zweite Paar so verlegen können, dass CD mit AB zusammenfällt, wobei sich dann die Kräfte P' und P'' ohne Weiteres zusammenaddiren. Man erhält dadurch ein Kräftepaar von demselben Hebelarm p und einer daran wirkenden Kraft, welche die Summe der Kräfte der beiden gegebenen Paare ist. Das Moment dieses neuen Paares ist $(P' + P'') \cdot p$ oder $= P' \cdot p + P'' \cdot p$ d. h. gleich der Summe der Momente der beiden einzelnen Paare. Hieraus ergibt sich durch einfache Erweiterung folgender Satz:

Wenn mehrere Kräftepaare von verschiedenen Kräften aber gleichen Hebelarmen in einer Ebene gegeben sind, so ist die Gesamtwirkung aller, gleich der Wirkung eines einzigen Kräftepaars mit demselben Hebelarm, während aber die daran wirkende Kraft gleich der Summe der Kräfte der einzelnen Paare ist. — Das Moment des resultirenden Kräftepaars ist gleich der Summe der Momente der einzelnen Paare.

Wegen der Kräftepaare, die in entgegengesetztem Sinn wirken, gilt das Analoge, was bei Num. 1. bemerkt wurde.

3) Wenn man zwei Kräftepaare $(+P, -P)$ am Hebelarm p und $(+Q, -Q)$ am Hebelarm q , von verschiedenen Kräften und verschiedenen Hebelarmen hat, so kann man das eine derselben, z. B. $(+Q, -Q)$ am Hebelarm q in ein anderes $(+P, -P)$ am Hebelarm $\frac{Q \cdot q}{P}$ verwandeln, da wir oben gesehen haben, dass Kräftepaare einander gleich sind, wenn ihre Momente gleich sind. Dadurch erhalten wir nun zwei Kräftepaare von gleichen Kräften aber verschiedenen Hebelarmen, die sich nach Num. 1. zusammensetzen. Hieraus folgt dann endlich dieser Satz:

Mehre Kräftepaare in einer Ebene von beliebigen Kräften und beliebigen Hebelarmen lassen sich stets in ein einziges Paar zusammensetzen und zwar wird von diesem nur die eine Bedingung erfordert, dass sein Moment gleich ist der Summe der Momente der einzelnen gegebenen Paare.

Auch hier gilt in Bezug auf Kräftepaare von entgegengesetztem Sinn dieselbe Bemerkung, wie bei den beiden vorigen Nummern.

Wenn man nun zwei Kräftepaare $(+P, -P)$ an dem Hebelarm p und $(+P', -P')$ an dem Hebelarm p' hat, so verhalte sich $P:P' = m:m'$ und $p:p' = n:n'$, so dass P eine gewisse Einheit der Kraft m mal, P' aber m' mal und p eine gewisse Längeneinheit n mal, p' aber n mal enthalte*); alsdann kann man das Kräftepaar $(+P, -P)$ an dem Hebelarm p , nach der ersten der drei vorigen Nummern, betrachten als die Summe von n Kräftepaaren mit derselben Kraft P an einem Hebelarm, der die Längeneinheit ist, und darauf wieder jedes der so erhaltenen n Paare, nach der zweiten der drei vorigen Nummern als die Summe von m Kräftepaaren, an welchen die Einheit der Kraft an einem Hebelarm gleich der Längeneinheit, wirkt, so dass man im Ganzen $m.n$ solcher Paare erhält, deren Gesamtwirkung gleich der des gegebenen Kräftepaars $(+P, -P)$ am Hebelarm p ist. Auf demselben Wege ergibt sich, dass die Wirkung des zweiten Kräftepaars $(+P', -P')$ am Hebelarm p' gleich ist der $m'.n'$ fachen Wirkung eines gleichen Paars, an welchem die Einheit der Kraft an einem Hebelarm gleich der Längeneinheit wirkt. Daher werden sich die Wirkungen beider gegebenen Paare zu einander verhalten wie $mn:m'n'$ oder nach der angenommenen Bedeutung von m und n , so wie $P.p:P'.p'$ oder wie ihre Momente. Setzen wir nun P' gleich der Einheit der Kraft und p' gleich der Einheit des Längenmaasses, so wird das zweite Paar die Einheit der Paare und man wird seine, der innern Natur nach unbekannte, Wirkung als die Einheit der Wirkungen aller Paare betrachten können. Hiernach geht aber die genannte Proportion in folgende über:

Wirk. des 1. Paar.: Einheit d. W. $= P.p:1$
 oder: die Wirkung eines Kräftepaars $(+P, -P)$ am Hebelarm p ist gleich $P.p$ d. h. gleich dem Moment des Paares oder gleich dem Product aus Kraft und Hebelarm. Hierbei muss man natürlich das Product von P und p in demselben Sinn nehmen, wie man es stets beim Product von benannten Grössen thut, nämlich die einzelnen Factoren gemessen durch ihre bezüglichen Einheiten, so dass sie eigentlich unbenannte Zahlen werden.

Für die letzten hier aufgestellten Sätze lässt sich auch leicht eine

*) Wegen der Commensurabilität oder Incommensurabilität siehe die Anm. auf S. 15.

andre sehr gebräuchliche Aussprache finden, die nach dem Durchgesprochenen keine weitere Rechtfertigung erfordert:

1) Kräftepaare von gleichen Kräften und ungleichen Hebelarmen verhalten sich zu einander wie ihre Hebelarme.

2) Kräftepaare von gleichen Hebelarmen, aber verschiedenen daran wirkenden Kräften, verhalten sich zu einander wie diese Kräfte.

3) Kräftepaare von beliebigen Hebelarmen und beliebigen daran wirkenden Kräften verhalten sich zu einander wie die Producte aus den Kräften in ihre Hebelarme*).

*) Moebius hat in seinem „Lehrbuch der Statik“ eine andre Art der Zeichnung und auch der Bezeichnung für ein Kräftepaar angenommen, als die ursprünglich von Poinsot in seiner „Statique“ gewählte war. Letzterer zeichnet z. B. Fig. XII. den Hebelarm AB , trägt an dem einen Endpunkt A die Verhältnisslinie AC der wirkenden Kraft nach unten gerichtet an und nennt diese $+P$, und an dem andern Endpunkt B eine mit AC gleich lange Verhältnisslinie BE derselben Kraft nach oben gerichtet an und nennt diese $-P$; Moebius dagegen zeichnet die erste Kraft ebenso nach unten und nennt sie AC , die zweite aber zeichnet er im zweiten Endpunkt des Hebelarms (da es ja an sich gleichgiltig ist, ob eine Kraft in B oder in irgend einem andern Punkt z. B. D ihrer Richtung angebracht wird) ebenfalls nach unten, nennt sie jedoch DB , indem er bei der Bezeichnung der, eine Kraft repräsentirenden Linie stets diese Anordnung der Buchstaben festhält, dass derjenige Buchstabe, welcher den Anheftungspunkt der Kraft bezeichnet, voransteht, während der zweite die Richtung und Seite angibt, nach welcher hin der Anheftungspunkt bewegt werden soll, so dass also z. B. BD und DB zwei gleiche und in gerade entgegengesetztem Sinn wirkende Kräfte bedeuten. Bei dieser gewiss sehr viel Zweckmässiges darbietenden Bezeichnung erhält man von dem Ausdruck Moment eines Kräftepaars unmittelbar die sinnliche Anschauung, dass es den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ bedeutet, wodurch die Beweise vieler Sätze sehr erleichtert werden und wodurch Moebius auf äusserst interessante geometrische Relationen gekommen ist. Aber dennoch schien es mir dem Zweck der gegenwärtigen Schrift angemessener, die Bezeichnung von Poinsot beizubehalten, da es mir schneller und leichter verständlich zu sein scheint, wenn man von einem Kräftepaar $(+P, -P)$ an dem Hebelarm p spricht, als wenn man es durch AC und DB bezeichnet, wobei man nothwendig erst in die Figur sehn muss, um den Sinn davon zu erkennen und ausserdem doch noch die Breite AB des Parallelogramms angeben muss.

Bisher haben wir stets angenommen, dass die mit einander zu vergleichenden Kräftepaare in einerlei Ebene liegen. Gehen wir nun aber weiter und denken uns zunächst Fig. XIII. zwei unter einander parallele Ebenen MN und UV , so möge in der erstern das Parallelpaar $(+P, -P)$ an dem Hebelarm $AB = p$ gegeben sein. Nimmt man alsdann in der zweiten Ebene an irgend einer beliebigen Stelle die Linie CD gleich und parallel mit $AB = p$ an und daran wirkend die Kräfte $(+P', -P')$, wobei $P' = P$ sein soll, so lässt sich zeigen, dass die Wirkung dieses letztern Kräftepaars die des erstern ersetzt.

In der That, wenn man zuerst nur das Kräftepaar $(+P, -P)$ an dem Hebelarm AB hat, so ziehe man in der zweiten Ebene die Linie CD gleich und parallel mit AB und verbinde die vier Punkte A, B, C, D durch gerade Linien, welche natürlich wie immer, wie schon oben S. 7 bemerkt worden, als starre unausdehnbare gedacht werden müssen, da die beiden Ebenen MN und UV als Durchschnittsebenen eines und desselben Körpers oder als fest mit einander verbunden zu betrachten sind; dann werden die beiden Linien AD und BC als Diagonalen eines Parallelogramms sich in ihrem gemeinsamen Mittelpunkt E schneiden. Nun ist es offenbar erlaubt in den Punkt C die gerade entgegengesetzt wirkenden Kräfte $+P'$ und $-P''$ und im Punkt D die ebenfalls gerade entgegengesetzt wirkenden Kräfte $+P''$ und $-P'$ anzubringen, ohne die geringste Störung in dem gesammten System zu verursachen, wenn man die Kräfte P' und P'' an absoluter Grösse gleich annimmt. Nimmt man dieselben aber auch noch gleich und parallel mit der Kraft P , so haben wir nun sechs Kräfte: $+P, -P, +P', -P', +P'', -P''$, welche dieselbe Wirkung äussern als die beiden ursprünglichen Kräfte $+P$ und $-P$ allein und welche man nun auf die passendste Weise zusammenstellen kann. Es vereinigen sich aber (S. 11) die beiden in einerlei Sinn an der Linie AD wirkenden Kräfte $+P$ und $+P'$ in eine einzige $+S = +P + P'$ in dem Mittelpunkte E von AD und ebenso vereinigen sich die beiden in einerlei Sinn an der Linie BC wirkenden Kräfte $-P$ und $-P''$ in eine einzige $-S = -P - P''$ in dem Mittelpunkt E von BC . Da nun die Richtungen aller Kräfte unter einander parallel waren, so werden $+S$ und $-S$ in gerade entgegengesetztem Sinn wirken und da sie ausserdem gleich sind, so werden sie sich geradezu gegen einander aufheben. Dem-

nach bleiben statt der vorigen 6 Kräfte nur noch in der Ebene UV die beiden Kräfte $+P'$ und $-P'$ übrig, oder da $P' = P$ war, das Kräftepaar $(+P, -P)$ am Hebelarm $CD = p$, welches die Wirkung des Kräftepaars $(+P, -P)$ am Hebelarm $AB = p$ in der Ebene MN ersetzt.

Da nun aber auch noch ferner das Kräftepaar $(+P, -P)$ am Hebelarm $CD = p$ (S. 36) in seiner Ebene beliebig verlegt und gedreht, ja sogar (S. 37) durch ein anderes Kräftepaar $(+Q, -Q)$ an einem Hebelarm q ersetzt werden kann, wenn nur $P \cdot p = Q \cdot q$ ist, so erhalten wir folgenden sehr allgemeinen Satz:

Die Wirkung eines Kräftepaars $(+P, -P)$ an dem Hebelarm p kann durch die Wirkung eines andern Kräftepaars $(+Q, -Q)$ an dem Hebelarm q , welches an einer beliebigen Stelle in derselben oder in einer parallelen Ebene liegt, ersetzt werden, wenn nur die einzige Bedingung erfüllt wird, dass ihre Momente gleich sind, also $P \cdot p = Q \cdot q$ ist.

Es ist aus diesem Satz ersichtlich, dass sich hier dieselben Folgerungen für Kräftepaare in parallelen Ebenen ergeben, wie solche (S. 37 u. f.) in den Nummern 1—3 für Paare in einer Ebene gezogen sind.

Gehen wir nun wieder einen Schritt weiter und nehmen zwei Kräftepaare in zwei nicht parallelen Ebenen, so werden sich letztere in einer geraden Linie schneiden und jedes Kräftepaar wird man (S. 36 u. 37) in seiner Ebene so verwandeln und verlegen können, dass beide einen gleichen Hebelarm und zwar in der gemeinsamen Durchschnittslinie beider Ebenen haben. Wir denken uns daher (Fig. XIV.) das Kräftepaar $(+P, -P)$ an dem Hebelarm AB in der Ebene MN und das Kräftepaar $(+Q, -Q)$ an demselben Hebelarm AB in der Ebene UV . Da wir stets den Winkel, unter welchem die Kräfte auf den Hebelarm wirken, als einen rechten annehmen, so wird sowohl die durch DAC als die durch EBF gelegte Ebene senkrecht auf der gemeinsamen Durchschnittslinie AB stehn und es werden also auch, wenn man beiderseitig die Parallelogramme vollendet, die Diagonalen AG und BH senkrecht auf derselben Linie AB stehn, beide in einerlei Ebene WZ liegen und mithin einander parallel gehn. Nun können wir aber die Diagonale AG als eine resultirende Kraft

+ R der beiden Kräfte + P und + Q und ebenso die Diagonale BH als eine resultirende Kraft — R der beiden Kräfte — P und — Q betrachten; mithin wird auch das Kräftepaar (+ R , — R) an dem Hebelarm AB als resultirendes Kräftepaar der beiden Paare (+ P , — P) und (+ Q , — Q) an demselben Hebelarm hervorgehn. Hieraus ergibt sich folgender Satz:

Wenn man zwei Kräftepaare (+ P , — P) und (+ Q , — Q) mit gleichem Hebelarme A , in zwei sich unter dem Neigungswinkel J schneidenden Ebenen hat, so construire man aus den Verhältnisslinien P und Q und aus dem Winkel J ein Parallelogramm, dessen Diagonale R heissen mag, so ist (+ R , — R) an einem gleichen Hebelarm A das resultirende Kräftepaar der beiden gegebenen Paare und zwar in einer Ebene liegend, welche durch die Durchschnittslinie der beiden gegebenen Ebenen so gelegt ist, dass sie deren Neigungswinkel J ebenso theilt wie die Diagonale R den Winkel J im Parallelogramm.

Dieses resultirende Kräftepaar kann man natürlich in seiner eigenen Ebene oder in eine parallele Ebene beliebig verlegen und verwandeln.

Durch wiederholte Anwendung desselben Satzes findet man offenbar für eine beliebige Anzahl von Kräftepaaren, die in beliebigen Ebenen liegen, ein Einziges, welches deren Gesamtwirkung repräsentirt.

Wir werden aber diesem Satze noch eine andre Aussprache geben können, wobei die Analogie mit den einfachen Kräften schärfer hervortritt. Wenn man nämlich die in den beiden Ebenen ursprünglich gegebenen Kräftepaare durch (+ S , — S) an dem Hebelarm s und (+ T , — T) an dem Hebelarm t bezeichnet, so sind deren Wirkungen (nach S. 39) $S.s$ und $T.t$, die man respective gleich setzen kann $P.A$ und $Q.A$, so dass sich verhält:

$$S.s : T.t = P : Q = L : M$$

wo L und M nicht einmal Kräfte bedeuten dürfen, indem wir das Verhältniss der Producte $S.s$ und $T.t$ als ein reines Zahlenverhältniss auffassen können. Hiernach spricht sich der vorige Satz so aus:

Wenn die Kräftepaare (+ S , — S) am Hebelarm s und (+ T , — T) am Hebelarm t in zwei sich unter dem Winkel J schneidenden Ebenen gegeben sind, so setzt man die unbenannten

Verhältnisszahlen ihrer Momente, als Linien L und M oder P und Q gedacht, unter dem Winkel J zu einem Parallelogramm zusammen, dessen Diagonale R heissen mag; alsdann verhalten sich die Momente oder Wirkungen der componirenden und des resultirenden Paares wie die unbenannten Zahlen $P:Q:R$ und letzteres Paar liegt in einer Ebene, welche den Neigungswinkel J der beiden gegebenen Ebenen ebenso theilt wie die Diagonale R den Winkel J im Parallelogramm.

Da sich aus dem erwähnten Parallelogramm offenbar ergibt:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2P \cdot Q \cdot \cos J}$$

so wird, wenn man diese ganze Gleichung mit A multiplicirt, das Moment oder die Wirkung G des resultirenden Paares:

$$\begin{aligned} G &= R \cdot A = \sqrt{(P \cdot A)^2 + (Q \cdot A)^2 + 2(P \cdot A)(Q \cdot A) \cos J} \\ &= \sqrt{(S \cdot s)^2 + (T \cdot t)^2 + 2(S \cdot s)(T \cdot t) \cos J} \\ &= \sqrt{L^2 + M^2 + 2L \cdot M \cdot \cos J} \end{aligned}$$

Wenn der Neigungswinkel der beiden Ebenen ein rechter ist, so wird

$$R \cdot A = \sqrt{(S \cdot s)^2 + (T \cdot t)^2}$$

$$\text{oder } G = \sqrt{L^2 + M^2}$$

d. h. das Moment des resultirenden Kräftepaars ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Momente der componirenden Paare.

Sind hierbei noch λ und μ die Winkel, welche die Ebene des resultirenden Kräftepaars mit den beiden andern bildet, so ergibt sich auch unmittelbar rückwärts:

$$L = G \cdot \cos \lambda$$

$$M = G \cdot \cos \mu$$

In dem obigen Satz wurde verlangt, dass man die Verhältnisszahlen oder Linien unter dem Neigungswinkel der Ebenen beider Kräftepaare zu einem Parallelogramm zusammensetze. Der Ort, wo diese Construction ausgeführt wird, ist ganz willkürlich. Man kann jedoch auch hierfür eine nähere Vorschrift geben, die noch beiläufig einen sehr wesentlichen Vortheil gewährt. Dazu dient folgende Betrachtung.

Damit ein Kräftepaar vollständig bestimmt sei, müssen drei Dinge ge-

geben sein: erstens die Ebene, in welcher das Paar wirkt, zweitens die Verhältnisszahl oder Verhältnisslinie seiner Wirkung oder seines Moments und drittens der Sinn, in welchem das Paar zu drehen strebt. Nun ist aber nach S. 42 gleichgiltig, ob ein Kräftepaar in einer oder in einer beliebigen damit parallelen Ebene wirkt; deshalb wird es durchaus nicht unumgänglich erforderlich sein gerade die Ebene des Paares, sondern nur deren Lage zu kennen, welche offenbar durch eine Gerade bestimmt sein wird, die auf ihr und somit auf allen damit parallelen Ebenen senkrecht steht. Diese senkrechte nennt Poinot die *Axe* des Paares. Denkt man sich daher von einem beliebigen, aber als fest angenommenen Punkt im Raum ein Perpendikel auf die Ebene des Paares gefällt und auf dieser *Axe* vom angenommenen Punkt aus die Verhältnisslinie des Moments aufgetragen, so wird hierdurch die Lage der Ebene des Paares und auch dessen Wirkung gegeben sein. Aber auch der Sinn, in welchem das Paar zu drehen strebt, wird durch diese *Axe* angedeutet werden können, wenn man nur ein bestimmtes Uebereinkommen trifft. Denken wir uns nämlich in dem Scheitel der *Axe* stehend, das Auge nach der Ebene des Paares gerichtet, und stellen wir z. B. fest, dass das Paar, wenn es den Sinn hat von der Linken nach der Rechten zu drehn, ein positives Moment haben solle, welches auf der *Axe* von ihrem Scheitel nach der Ebene des Paares hin aufgetragen wird, wenn es dagegen in dem Sinne von der Rechten zur Linken zu drehen strebt, ein negatives Moment hat, welches auf der *Axe* von ihrem Scheitel auf der rückwärts gehenden Verlängerung aufgetragen wird, so ist das Kräftepaar in allen seinen drei erforderlichen Beziehungen durch seine *Axe* vollständig repräsentirt.

Der vorhin bewiesene Satz bleibt bei der soeben durchgesprochenen Auffassung vollkommen derselbe, nur werden wir die dort gebrauchten Grössen L , M , G jetzt die *Axen* der einzelnen Kräftepaare nennen.

Man wird aber jetzt auch unmittelbar, ohne dass es nöthig sein dürfte einen besondern Beweis hinzuzufügen, da er derselbe wie der (S. 31) für einfache Kräfte gegebene sein würde, folgenden Satz für drei Kräftepaare aussprechen können:

Wenn drei Kräftepaare in drei verschiedenen Ebenen gegeben sind und zwar durch ihre *Axen* L , M , N , welche von einem und demselben Scheitelpunkt ausgehn, so ist die *Axe*

des resultirenden Kräftepaars die Diagonale G des Parallelepipedums, welches man aus den gegebenen Axen L , M , N gebildet hat.

Wenn die Ebenen der drei gegebenen Paare, also auch ihre Axen, auf einander senkrecht stehn, so wird natürlich:

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

und wenn man λ , μ , ν die Winkel nennt, welche die Axe des resultirenden Paares mit denen der componirenden bildet, so ist

$$L = G \cdot \cos \lambda,$$

$$M = G \cdot \cos \mu,$$

$$N = G \cdot \cos \nu.$$

In diesen Gleichungen liegt zugleich die Regel, wie man jedes beliebig im Raum gegebene Kräftepaar durch drei andre Paare ersetzen kann, welche in drei unter einander senkrechten Ebenen liegen.

Wenn man nach dem Vorigen erkannt hat, wie man zwei oder drei in beliebigen Ebenen liegende Kräftepaare in ein einziges zusammensetzen kann, so wird man auch durch wiederholtes Anwenden desselben Verfahrens jede mögliche Anzahl von Kräftepaaren in ein einziges vereinigen können.

Denken wir uns jetzt eine beliebige Anzahl von Kräften P , P' , P'' , P''' , $\dots$, die auf irgend welche Weise an einem Körper oder einem System von Punkten angebracht sind, so wählen wir uns irgend einen bestimmten, wie immer mit dem System auf unveränderliche Weise verbundenen Punkt O (möge er der Anfangspunkt der Coordinaten heissen); alsdann können wir in diesem Punkt in Bezug auf jede einzelne in einem gegebenen Punkt A wirkende Kraft P , zwei gerade entgegengesetzt wirkende, unter einander und der gegebenen gleiche Kräfte $+P$, $-P$ angebracht denken, welche, da sie sich das Gleichgewicht halten, durchaus Nichts in dem ganzen System ändern. Wir haben also statt der einen in A wirkenden Kraft jetzt eine gleiche und parallele aber in O wirkende Kraft und ausserdem ein Kräftepaar $(+P, -P)$ an dem Hebelarm AO (oder auch an einem Hebelarm, welcher gleich der senkrechten Entfernung der beiden Richtungen der in A und O angebrachten Kräfte ist); dieses Kräftepaar kann man auch noch in derselben Ebene oder auch in irgend einer parallelen Ebene beliebig verlegen.

Wenn man nun dasselbe Verfahren auf jede einzige der gegebenen Kräfte P anwendet, so erhält man dadurch zuerst in dem Punkte O ebensoviele Kräfte, als überhaupt gegeben sind und welche alle diesen letztern gleich und parallel sind und ausserdem noch in verschiedenen Ebenen eine gleiche Anzahl von Kräftepaaren. Nach dem Bisherigen lassen sich aber alle in O wirkenden Kräfte in eine einzige Kraft R und die in den verschiedenen Ebenen wirkenden Kräftepaare in ein einziges Kräftepaar $(+S, -S)$ vereinigen. Wenn man will, kann man auch dieses resultirende Kräftepaar noch parallel mit sich so verlegen, dass der Anheftungspunkt von $+S$ mit dem Anheftungspunkt von R zusammenfällt, wobei sich dann diese beiden S und R in eine einzige Kraft T vereinigen, so dass ausser dieser noch die Kraft $-S$ übrig bleibt, welche nicht in derselben Ebene mit jener liegt.

Hierdurch erhalten wir folgenden ganz allgemeinen Schluss:
Wenn auf einen Körper oder auf ein System von unter sich auf unwandelbare Weise verbundenen Punkten beliebige Kräfte wirken, so lassen sich diese alle entweder auf eine einzige Kraft und ein einziges Kräftepaar oder auf zwei einzelne nicht in einerlei Ebene liegende Kräfte zurückführen.

In beiden Fällen muss der Zusatz, im Allgemeinen, beigefügt werden; denn es können sogleich anzuführende Specialitäten vorkommen, bei denen das Gesagte nicht vollständig in dem angedeuteten Sinn stattfindet. Wenn nämlich die resultirende Kraft R verschwindet, während das Kräftepaar $(+S, -S)$ einen endlichen Werth behält, so führen sich sämmtliche gegebene Kräfte auf ein einziges Paar zurück und wenn zweitens die Ebene des resultirenden Paares $(+S, -S)$ mit der resultirenden Kraft R in derselben oder in einer damit parallelen Ebene liegt, in welchem letztern Fall das Paar (nach S. 42) in die Ebene der Kraft R übertragen werden kann, so reduciren sich sämmtliche gegebene Kräfte auf drei in einerlei Ebene liegende, die sich natürlich schliesslich in eine einzige vereinigen lassen.

Da nun einer Seits einem Kräftepaar niemals durch eine einzige Kraft, sondern nur durch ein Kräftepaar von gleichem Moment, das aber in entgegengesetztem Sinne zu drehen strebt, das Gleichgewicht gehalten

werden kann und da andrer Seits zwei nicht in einerlei Ebene liegende Kräfte sich auf ein Kräftepaar und eine einzelne Kraft zurückführen lassen, so folgt unmittelbar, dass, mit Ausnahme der angegebenen Specialitäten, ein System von Kräften unter keinen andern Umständen im Gleichgewicht sein wird, als wenn die resultirende Kraft R für sich gleich Null ist und auch das Moment des resultirenden Kräftepaars $(+S, -S)$ für sich verschwindet.

Wenn nun aber dieses zuletzt Gesagte nicht stattfindet, so stellt sich als nächste Frage offenbar diese heraus: ist es möglich, der einzelnen Kraft R und dem Kräftepaar $(+S, -S)$ durch Hinzufügung einer einzelnen Kraft R' das Gleichgewicht zu halten? — Hier gibt es offenbar nur drei zulässige Annahmen über die neue Kraft R' : entweder sind die beiden Kräfte R und R' so beschaffen, dass sie sich in eine einzige vereinigen lassen und dann kann nach dem Vorhergehenden diese nicht mit dem Paare $(+S, -S)$ im Gleichgewicht sein — oder zweitens, die Kräfte R und R' lassen sich auf eine einzige Kraft und ein Kräftepaar zurückführen, dann lassen sich dieses Paar mit dem ursprünglichen $(+S, -S)$ in ein einziges Paar zusammensetzen und wir erhalten wieder eine einzelne Kraft und ein einzelnes Paar, die sich natürlich nicht das Gleichgewicht halten können — oder endlich drittens R' bildet mit R ein einzelnes Paar, so dass also $R' = -R$ in einer passenden Entfernungen mit R parallel ist; dann vereinigen sich diese zu einem einzigen Paare, während keine einzelne Kraft dabei vorkommt: soll nun Gleichgewicht statt finden, so muss das Moment dieses neu entstandenen resultirenden Kräftepaars gleich Null sein, was offenbar nicht anders möglich ist, als wenn die beiden Kräftepaare $(+R, -R)$ und $(+S, -S)$ in einerlei oder in parallelen Ebenen liegen und ausserdem gleiche Momente haben. Das Letztere lässt sich jeder Zeit ermöglichen, indem man dem zugehörigen Hebelarm eine passende Grösse gibt und man wird daher beliebig vielen an einem System vom Punkte wirkenden Kräften stets durch Hinzufügung einer einzelnen Kraft das Gleichgewicht halten können, wenn die einzelne resultirende Kraft in derselben oder in einer parallelen Ebene mit der des resultirenden Kräftepaars liegt.

Zweite Vorlesung.

Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts eines beliebigen Systems von Kräften.

Wir haben am Schluss der vorigen Vorlesung gesehen, dass wir jede Kraft P , die auf einen beliebigen Punkt A wirkt, ersetzen können durch eine gleiche und parallel wirkende Kraft P in einem beliebigen aber bestimmt angenommenen Punkt O und durch ein Kräftepaar $(+P, -P)$ an dem Hebelarm AO , und wir haben ferner gesehen, dass, wenn das ganze System im Gleichgewicht sein soll, die Resultante aller in O wirkenden Kräfte für sich gleich Null, so wie auch das resultirende Kräftepaar für sich gleich Null sein müsse. Die Sprache in diesem Gesetz ist aber offenbar keine analytisch verständliche und wir müssen daher letztere gegenwärtig hier suchen.

§. 7.

Nehmen wir nun zunächst an, dass alle Kräfte in einerlei Ebene wirken, so sei (Fig. XV.) OX und OY ein rechtwinkliges Coordinaten-System, in Bezug auf welches die Anheftungspunkte und Richtungen der Kräfte bestimmt sein mögen. Die verschiedenen Stellungen, welche die Richtungen den Axen gegenüber einnehmen können, sind in der Figur für einen Quadranten vollständig verzeichnet. Wir gehen diese vier Fälle einzeln durch, indem wir dabei ein für alle Mal festsetzen: 1) dass die y Coordinaten oberhalb der X Axe positiv, unterhalb derselben negativ; die x Coordinaten rechts von der Y Axe positiv, links negativ genommen werden sollen; 2) dass die Kräfte, welche den Anfangspunkt O nach X hin, so wie auch die, welche denselben Punkt nach Y hin, oder mit einem Wort, welche die Axen in ihrem positiven Sinn zu vergrössern streben, positive, die andern aber negative genannt werden sollen; und 3) dass die Momente derjenigen Kräftepaare, welche in dem Sinne von links nach rechts zu drehen streben, positiv, die Momente derjenigen aber, welche in dem Sinne von rechts nach links zu drehen streben, negativ genommen werden sollen.

a) Wenn die Kraft P_1 in dem Punkte B_1 von links nach rechts und von oben nach unten wirkt, so denke man sich dieselbe in die beiden mit den Coordinatenaxen parallelen Kräfte X_1 und Y_1 zerlegt. Zieht man

nun die beiden Coordinaten des Anheftungspunkts B_1 nämlich $B_1 G_1 (=y_1)$ und $B_1 H_1 (=x_1)$ und denkt sich alsdann in dem Punkt G_1 auf der X Axe zwei gleiche Kräfte X_1 in gerade entgegengesetztem Sinne angebracht und ebenso in dem Punkt H_1 auf der Y Axe zwei gleiche Kräfte Y_1 ebenfalls in gerade entgegengesetztem Sinn wirkend, wodurch offenbar Nichts in dem ganzen System geändert wird, so erhält man dadurch in Stelle der einen Kraft P_1 jetzt sechs Kräfte, welche wir in folgender Weise gruppieren können: 1) eine Kraft X_1 in der X Axe selbst, welche diese zu vergrößern strebt; 2) ein Kräftepaar an dem Hebelarm $B_1 G_1 (=y_1)$ mit der Kraft X_1 , welches in dem Sinne von links nach rechts zu drehen strebt, dessen Moment daher positiv sein muss und also, da sowohl die Kraft als die Coordinate positiv sind, $=+X_1 y_1$ sein wird; 3) eine Kraft Y_1 in der Y Axe selbst, welche diese zu verkleinern strebt; 4) ein Kräftepaar an dem Hebelarm $B_1 H_1 (=x_1)$ mit der Kraft Y_1 , welches in dem Sinne von links nach rechts zu drehen strebt, dessen Moment daher positiv sein muss und also, da die Kraft Y_1 in sich negativ gedacht wird, die Coordinate x_1 aber positiv ist, $=-Y_1 x_1$ sein wird.

b) Indem wir ebenso die Kraft P_2 durch sechs Kräfte ersetzen und sie in ähnlicher Weise als vorhin gruppieren, erhalten wir 1) eine Kraft X_2 in der X Axe selbst, welche diese zu vergrößern strebt; 2) ein Kräftepaar am Hebelarm $B_2 G_2 (=y_2)$ mit der Kraft X_2 , welches in dem Sinne von links nach rechts zu drehen strebt, dessen Moment daher positiv sein muss und also, da sowohl Kraft als Coordinate in sich positiv sind, $=+X_2 y_2$ sein wird; 3) eine Kraft Y_2 in der Y Axe selbst, welche diese zu vergrößern strebt; 4) ein Kräftepaar an dem Hebelarm $B_2 H_2 (=x_2)$ mit der Kraft Y_2 , welches in dem Sinne von rechts nach links zu drehen strebt, dessen Moment daher negativ sein muss und also, da sowohl Kraft als Coordinate in sich positiv sind, $=-Y_2 x_2$ sein wird.

c) Die Kraft P_3 liefert 1) eine Kraft X_3 in der X Axe selbst, welche diese zu verkleinern strebt; 2) ein Kräftepaar am Hebelarm $B_3 G_3 (=y_3)$ mit der Kraft X_3 , welches in dem Sinne von rechts nach links zu drehen strebt, dessen Moment daher negativ sein muss und also, da die Kraft X_3 in sich negativ, die Coordinate aber positiv ist, $=+X_3 y_3$ sein wird; 3) eine Kraft Y_3 in der Y Axe selbst, welche diese zu verkleinern strebt; 4) ein Kräftepaar an dem Hebelarm $B_3 H_3 (=x_3)$ mit der Kraft

Y_3 , welches in dem Sinne von links nach rechts zu drehen strebt, dessen Moment daher positiv sein muss und also, da die Kraft Y_3 in sich negativ, die Coordinate aber positiv ist, $= -Y_3 x_3$ sein wird.

d) Die vierte Kraft P_4 liefert endlich: 1) eine Kraft X_3 in der X Axe selbst, welche diese zu verkleinern strebt; 2) ein Kräftepaar an dem Hebelarm $B_4 G_4 (=y_4)$ mit der Kraft X_4 , welches in dem Sinne von rechts nach links zu drehen strebt, dessen Moment daher negativ sein muss und also, da die Kraft X_4 in sich negativ, die Coordinate aber positiv ist, $= +X_4 y_4$ sein wird; 3) eine Kraft Y_3 in der Y Axe selbst, welche diese zu vergrössern strebt; 4) ein Kräftepaar an dem Hebelarm $B_4 H_4 (=x_4)$ mit der Kraft Y_4 , welches in dem Sinne von rechts nach links zu drehen strebt, dessen Moment daher negativ sein muss und also, da sowohl Kraft als Coordinate in sich positiv sind, $= -Y_4 x_4$ sein wird.

Wenn nun aber einfache Kräfte in einerlei Richtung wirken, so setzen sie sich ja nach S. 11 durch einfache Addition zusammen, und wenn mehrere Kräftepaare in einerlei Ebene wirken, so ist nach S. 38 das Moment des resultirenden Kräftepaars gleich der Summe der Momente der einzelnen Paare. Hierdurch erhalten wir als Gesamtwirkung der betrachtete vier Kräfte P :

in der X Axe:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

in der Y Axe:

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$$

und an Momenten in der XY Ebene:

$$(X_1 y_1 - Y_1 x_1) + (X_2 y_2 - Y_2 x_2) + (X_3 y_3 - Y_3 x_3) + (X_4 y_4 - Y_4 x_4)$$

In allen diesen drei Ausdrücken muss man wohl darauf achten, dass den verschiedenen Kräften X und Y stets das ihnen zukommende Vorzeichen zuertheilt werde, je nachdem sie die Axen zu vergrössern oder zu verkleinern streben.

Es sind hier nur die vier möglichen Lagen der Kraft P in einem einzigen Quadranten durchgenommen. Die Verfolgung derselben auch in den übrigen Quadranten ist hier übergangen, weil sie durchaus keine Schwierigkeit darbietet, wenn man nur auf das Vorzeichen der Coordinaten achtet. So würde z. B. die Kraft P_5 ein Kräftepaar an dem Hebelarm $B_5 G_1 (=y_5)$ mit der Kraft X_5 liefern, welches in dem Sinne

von rechts nach links zu drehen strebt, dessen Moment daher negativ sein muss und also, da die Kraft X_5 positiv, die Coordinate y_5 aber in sich negativ ist, $= +X_5 y_5$ sein wird; bei dem zweiten hier entstehenden Kräftepaar an dem Hebelarm $B_5 H_5 (= x_5)$ ist die Kraft Y_5 in sich negativ zu nehmen, weil sie den Punkt O nach unten zu drücken strebt, die Coordinate x_5 dagegen positiv; es wird daher das Moment dieses Paares, da es in dem Sinne von links nach rechts zu drehen strebt, positiv, also $= -Y_5 x_5$ sein müssen.

Denkt man sich dieses nun für alle möglichen Lagen der gegebenen Kräfte durchgeführt, so wird man leicht zu folgendem allgemeinen Schluss gelangen:

Wenn eine beliebige Anzahl n von Kräften in einerlei Ebene gegeben sind, so zerlegt man jede einzelne in zwei mit den Coordinatenachsen parallele Seitenkräfte; alsdann wird die Gesamtwirkung sämtlicher Kräfte aus folgenden drei Theilen bestehn:

1) in der XAxe, die Summe der mit dieser parallelen Composanten:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \sum_{p=1}^{p=n} X_p = X,$$

2) in der YAxe, die Summe der mit dieser parallelen Composanten:

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots = \sum_{p=1}^{p=n} Y_p = Y,$$

3) in derselben Ebene, die Summe sämtlicher Momente:

$$(X_1 y_1 - Y_1 x_1) + (X_2 y_2 - Y_2 x_2) + \dots = \sum_{p=1}^{p=n} (X_p y_p - Y_p x_p) = N.$$

Die Bezeichnung der Composanten der einzelnen Kräfte durch $X_1 Y_1 X_2 Y_2$ u. s. w. ist für die Anwendung nicht zweckmässig, weil die Richtung jeder Kraft P offenbar durch den Winkel gegeben sein wird, den sie mit einer von beiden, z. B. mit der XAxe bildet. Wenn man hier nun streng darauf achtet, diesen Neigungswinkel immer in einer und derselben Weise zu zählen, z. B. von der XAxe ausgehend, sich nach links drehend bis man zur Richtungslinie der Kraft kommt, so wie es in der

Figur durch kleine Bögen mit beigefügtem beziehlichen α angedeutet ist, so wird man ganz im Allgemeinen schreiben dürfen

$$X = P \cdot \cos \alpha \text{ und } Y = P \cdot \sin \alpha$$

wo dann zugleich, bei der gehörigen Beachtung des Winkels und seiner goniometrischen Function, jede Kraft das ihr zukommende Vorzeichen erhält.

Hiernach erhalten die obigen drei Bestandtheile der Gesamtwirkung folgende Gestalt:

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \dots = \sum_{p=1}^{p=n} P_p \cos \alpha_p = X$$

$$P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 + \dots = \sum_{p=1}^{p=n} P_p \sin \alpha_p = Y$$

$$P_1 (y_1 \cos \alpha_1 - x_1 \sin \alpha_1) + P_2 (y_2 \cos \alpha_2 - x_2 \sin \alpha_2) + \dots \\ = \sum_{p=1}^{p=n} P_p (y_p \cos \alpha_p - x_p \sin \alpha_p) = N.$$

Wir haben hierdurch alle gegebenen Kräfte auf zwei einzelne Kräfte X und Y und auf ein Kräftepaar zurückgeführt. Da sich aber die beiden Kräfte X und Y in eine einzige $\sqrt{X^2 + Y^2}$ vereinigen lassen, so erhalten wir eine einzige Kraft und ein Kräftepaar.

Stellen wir nun die Bedingung, dass sämtliche Kräfte sich das Gleichgewicht halten sollen, so wird dieses, da eine einzelne Kraft nie einem Kräftepaar das Gleichgewicht halten kann, nicht anders möglich sein, als wenn die Kraft $\sqrt{X^2 + Y^2}$ für sich und auch das Kräftepaar für sich gleich Null wird. Die erste Bedingung, dass $\sqrt{X^2 + Y^2} = 0$ sei, hat unmittelbar, weil es Summe zweier Quadrate ist, das Verschwinden der einzelnen Grössen X und Y zur Folge, so dass man diese Bedingungen des Gleichgewichts erhält:

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ N = 0. \end{cases}$$

Findet nun aber nicht Gleichgewicht statt, so ist es die nächste Frage, ob es eine einzelne Kraft gibt, welche dem ganzen System der gegebenen Kräfte das Gleichgewicht halten könne, oder, was dasselbe besagt, ob eine einzige Kraft die Wirkung sämtlicher Kräfte ersetzen könne. Wenn es eine solche Kraft, die R heissen mag, gäbe, so müsste durch

Hinzufügung der Kraft R zu den ursprünglich gegebenen Kräften, Gleichgewicht erzielt werden. Nennt man daher α den Neigungswinkel dieser neu hinzutretenden Kraft gegen die X Axe, so wie x und y (alle drei Grössen α , x , y ohne Index) die Coordinaten ihres Anheftungspunkts, so wird man nach den vorhin angeführten Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts folgende Relationen zu deren näherer Bestimmung erhalten:

$$X - R \cos \alpha = 0$$

$$Y - R \sin \alpha = 0$$

$$N - R (y \cos \alpha - x \sin \alpha) = 0.$$

Hieraus ergibt sich zunächst:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \sin \alpha = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$N - Xy - Yx = 0.$$

Aus der ersten Gleichung erhält man die absolute Grösse der Resultante, die beiden folgenden geben die Neigung ihrer Richtung gegen die Coordinatenachsen und die dritte gibt diese Richtung unter der analytischen Form als Gleichung einer geraden Linie, wo x und y die laufenden Coordinaten repräsentiren.

Man erhält hier nicht einen bestimmten, einzelnen Anheftungspunkt für die Resultante, weil es offenbar im Allgemeinen gleichgiltig ist, in welchem Punkt ihrer Richtung man sich dieselbe angebracht denkt.

a) Ein hierher gehöriger, wenn auch sehr einfacher, doch wegen seiner grossen Anwendbarkeit äusserst wichtiger specieller Fall ist dieser, dass die Richtungen aller Kräfte unter einander parallel sind.

Wir können hierbei, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, annehmen, dass die Y Axe parallel mit der Richtung sämtlicher Kräfte geht, so dass der Neigungswinkel α jeder dieser Richtungen gegen die X Axe ein rechter wird. Hierdurch werden natürlich die Cosinusse aller α der Einheit gleich, während deren Sinusse verschwinden.

Die Gleichungen des Gleichgewichts reduciren sich für diesen Fall auf:

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots = 0$$

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots = 0.$$

In diesen Gleichungen ist für Parallel-Kräfte offenbar, folgendes Gesetz ausgesprochen:

Parallele Kräfte, die in einerlei Ebene wirken, sind im Gleichgewicht, wenn 1) ihre Summe (selbstverständlich jede einzelne Kraft mit dem ihr zukommenden Vorzeichen genommen) gleich Null ist und wenn 2) die Summe der Producte dieser Kräfte in die senkrechten Entfernungen ihrer Richtungen von einem fest angenommenen Punkt (wobei sowohl die Kräfte als auch die Entfernungen von einem festen Anfangspunkt mit den entsprechenden Vorzeichen genommen werden müssen) gleich Null sind, oder mit andern Worten, wenn die Summe der Momente*) der einzelnen Kräfte in Bezug auf einen beliebigen, aber fest angenommenen, Punkt gleich Null ist.

Wenn diese Kräfte sich nicht das Gleichgewicht hielten, so wäre die nächste Frage, ob sie durch eine einzige Kraft im Gleichgewicht gehalten werden könnten, oder, was dasselbe heisst, ob sie eine Resultante haben. Wenn eine solche existirt, so heisse sie selbst R und ihre Entfernung von dem festen Anfangspunkt x (ohne Index), dann wird

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

$$R \cdot x = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots$$

woraus sich ausser der Bestimmung für R auch noch die für x ergibt:

$$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots}$$

Dieser letztere Ausdruck wird stets einen bestimmten Werth angeben, wenn nicht R oder die Summe aller Kräfte gleich Null wird, in welchem Fall er unendlich werden kann und alsdann auf ein Kräftepaar zurückführt.

Die hierbei erhaltene Gleichung

$$R x = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots$$

*) Moment einer Kraft in Bezug auf einen Punkt nennt man das Product aus der Kraft in das von dem Punkt auf die Richtung der Kraft gefällte Perpendikel. (siehe auch S. 18).

Moment einer Kraft in Bezug auf eine Ebene nennt man das Product aus der Kraft in das vom Anheftungspunkt der Kraft auf jene Ebene gefällte Perpendikel.

lässt auch eine, bei einer spätern Untersuchung sehr zweckmässige Aussprache zu, nämlich:

Die Summe der Momente von Parallelkräften in Bezug auf einen beliebigen Punkt ihrer Ebene ist gleich dem Moment ihrer Resultante in Bezug auf denselben Punkt.

b) Ein zweiter ganz specieller Fall dürfte auch, seiner Ableitung aus den allgemeinsten Formeln wegen, interessant genug sein, um hier eine Stelle zu finden.

Wir nehmen (Fig. XVI.) nur zwei Kräfte P_1 und P_2 als gegeben an und suchen für diese die Resultante. Um die Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir, was offenbar erlaubt ist, die Verbindungslinie $B_1 B_2$ der beiden Anheftungspunkte der Kräfte zur X Axe an. O sei der Anfangspunkt der Coordinaten, so dass $B_1 O = x_1$ und $B_2 O = x_2$ ist, während beide zugehörigen y gleich Null werden. Die allgemeinen Gleichungen zur Bestimmung der Resultante werden

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 = R \cos \alpha$$

$$P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 = R \sin \alpha$$

$$-P_1 x_1 \sin \alpha_1 - P_2 x_2 \sin \alpha_2 = R (y \cos \alpha - x \sin \alpha).$$

Hieraus erhält man:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$\cos \alpha = \frac{P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2}{\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_1)}},$$

$$\sin \alpha = \frac{P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2}{\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_1)}},$$

$$(P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2) y = (x - x_1) P_1 \sin \alpha_1 + (x - x_2) P_2 \sin \alpha_2.$$

Wenn wir in der letzten Gleichung, welche die der Resultante ist, $y=0$ setzen, so erhalten wir die Abscisse des Durchschnittspunkts der Resultante mit der X Axe:

$$x = \frac{P_1 x_1 \sin \alpha_1 + P_2 x_2 \sin \alpha_2}{P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2}$$

oder in besserer Gestalt:

$$(x - x_1) \cdot P_1 \sin \alpha_1 + (x - x_2) \cdot P_2 \sin \alpha_2 = 0$$

oder: $(x - x_1) : (x_2 - x) = P_2 \sin \alpha_2 : P_1 \sin \alpha_1$

Wäre nun in der Figur C dieser Durchschnittspunkt, so dass $CO = x$ ist, so gibt die gefundene Proportion:

$B_1 C : B_2 C = P_2 \sin \alpha_2 : P_1 \sin \alpha_1$
 oder wenn man das erste und dritte Glied mit $\sin \alpha_1$ und das zweite und vierte Glied mit $\sin \alpha_2$ multiplicirt und darauf das dritte und vierte Glied durch $\sin \alpha_1$ und $\sin \alpha_2$ dividirt:

$$B_1 C \cdot \sin \alpha_1 : B_2 C \cdot \sin \alpha_2 = P_2 : P_1$$

Nun sind aber die von C auf die Richtungen der Kräfte gefällten Perpendikel offenbar:

$$p_1 = -B_1 C \cdot \sin \alpha_1 \quad \text{und} \quad p_2 = -B_2 C \cdot \sin \alpha_2$$

mithin geht die Proportion über in:

$$p_1 : p_2 = P_2 : P_1$$

oder $P_1 p_1 = P_2 p_2$, d. h. wir erhalten den bekannten Satz, dass, für's Gleichgewicht, auch beim Winkelhebel $M C N$ die statischen Momente beider Kräfte in Bezug auf den Unterstützungspunkt einander gleich sein müssen.

§. 8.

Gehen wir jetzt zu dem allgemeinsten Fall über, dass die auf einen Körper wirkenden Kräfte ganz beliebig irgend wie im Raume liegen, so wählen wir uns irgend einen Punkt im Raum zum Anfangspunkt der Coordinaten und legen durch ihn drei auf einander senkrecht stehende Coordinaten-Ebenen. Nun möge (Fig. XVII.) in dem Punkt B_1 eine Kraft P_1 in beliebiger Richtung wirken. Von diesem Anheftungspunkt B_1 fälle man ein Perpendikel $B_1 D$ auf die xy Ebene, so werden seine zugehörigen Coordinaten $OE = x_1$, $OC = ED = y_1$ und $B_1 D = z_1$. Nun zerlege man die Kraft P_1 in drei mit den Coordinaten-Axen parallele Seitenkräfte X_1 , Y_1 , Z_1 , bringe darauf im Anfangspunkt O in der Z Axe zwei gleiche und gerade entgegengesetzte Kräfte $+Z_1$ und $-Z_1$ an, so erhält man statt der einen Kraft Z_1 in dem Punkte B_1 eine parallele und gleich grosse Kraft Z_1 im Anfangspunkt O in der Z Axe selbst und ausserdem ein Kräftepaar $(+Z_1, -Z_1)$ an dem Hebelarm OB_1 oder auch (wenn man den Anheftungspunkt von B_1 nach dem Punkt D in derselben Richtungslinie der Kraft Z_1 verlegt denkt) an dem Hebelarm OD . Nun kann man aber nach S. 44 jedes Kräftepaar in zwei andre zerlegen, wenn die Verhältnisslinien dieser drei Paare respective die Diagonale und die beiden Seiten eines Parallelogramms sind, also wird man das Kräftepaar $(+Z_1, -Z_1)$

an dem Hebelarm OD durch zwei Kräftepaare an den Hebelarmen OE und OC ersetzen können, wenn man an ihnen dieselbe Kraft Z_1 wirkend annimmt. Da diese Kraft senkrecht auf der Ebene XOY steht, so werden diese beiden Paare respective in den Ebenen XOZ und YOZ liegen, und da OE die Coordinate x_1 des Anheftungspunkts B_1 und OC die Coordinate y_1 desselben Punkts ist, so werden ihre Momente $=Z_1 x_1$ und $=Z_1 y_1$ sein. Hiernach sieht man, dass sich statt der einen Kraft Z_1 im Punkt B_1 folgende drei Grössen ergeben:

- 1) eine Kraft Z_1 im Anfangspunkt O in der Z Axe selbst wirkend,
- 2) ein Kräftepaar in der xz Ebene mit dem Moment $Z_1 x_1$ und
- 3) ein Kräftepaar in der yz Ebene mit dem Moment $Z_1 y_1$.

Wenn man in ganz gleicher Weise von B_1 ein Perpendikel auf die xz Ebene fällt und das dabei entstehende Kräftepaar ebenfalls in zwei andre zerlegt, so erhält man in Stelle der einen Kraft Y_1 im Punkt B_1 diese drei Grössen:

- 1) eine Kraft Y_1 im Anfangspunkt O in der Y Axe selbst wirkend,
- 2) ein Kräftepaar in der yz Ebene mit dem Moment $Y_1 z_1$ und
- 3) ein Kräftepaar in der xy Ebene mit dem Moment $Y_1 x_1$.

Und fällt man drittens von dem Punkt B_1 ein Perpendikel auf die yz Ebene, so erhält man, nach Zerlegung des dabei entstehenden Paares, statt der einzigen Kraft X_1 im Punkt B_1 folgende drei Grössen:

- 1) eine Kraft X_1 im Anfangspunkt O in der X Axe selbst wirkend,
- 2) ein Kräftepaar in der xy Ebene mit dem Moment $X_1 y_1$ und
- 3) ein Kräftepaar in der xz Ebene mit dem Moment $X_1 z_1$.

Diese hier aufgeführten neun Grössen kommen also in Stelle der einzigen Kraft P_1 in die Rechnung. Wenn man sie genauer betrachtet, so ergeben sie in jeder der drei Coordinaten-Ebenen zwei Kräftepaare, die sich natürlich nach S. 38 in eines zusammensetzen lassen; so finden sich z. B. in der xz Ebene die beiden Paare mit den Momenten $Z_1 x_1$ und $X_1 z_1$. Wenn man hierbei aber die auf S. 49 gemachte Bemerkung beachtet, wonach diejenige Kraft, welche eine Axe zu vergrössern strebt, als positiv, diejenige aber, welche eine Axe zu verkleinern strebt, als negativ in die Rechnung einzuführen ist, so wird das Moment des aus den beiden genannten resultirenden Kräftepaars $=Z_1 x_1 - X_1 z_1$ werden.

Auf gleiche Weise werden sich die beiden in der yz Ebene wirken-

den Kräftepaare in eines zusammensetzen, dessen Moment $= Y_1 z_1 - Z_1 y_1$ ist.

Und drittens setzen sich die in der xy Ebene wirkenden Paare in eines zusammen, dessen Moment $= X_1 y_1 - Y_1 x_1$ ist.

Sonach haben wir ganz allgemein für jede einzelne Kraft P , die auf einen gewissen Punkt B , dessen Coordinaten x, y, z sind, wirkt und deren Composanten parallel mit den drei Coordinatenachsen X, Y, Z sein mögen, folgende sechs Terme in die Rechnung einzuführen:

- 1) in der X Axe selbst: eine Kraft $= X$,
- 2) in der Y Axe selbst: eine Kraft $= Y$,
- 3) in der Z Axe selbst: eine Kraft $= Z$,
- 4) in der yz Ebene: ein Parallelpaar, dessen Moment $= Yz - Zy$ ist,
- 5) in der xz Ebene: ein Parallelpaar, dessen Moment $= Zx - Xz$ ist,
- 6) in der xy Ebene: ein Parallelpaar, dessen Moment $= Xy - Yx$ ist.

Denkt man sich nun jede einzelne der gegebenen Kräfte P in diese analogen sechs Bestandtheile zerlegt, so erhält man offenbar in jeder der drei Coordinaten-Axen eine entsprechende Anzahl von einfachen Kräften, die sich nach S. 11 durch simple Addition vereinigen lassen, und ausserdem in jeder der drei Coordinaten-Ebenen eine gleichfalls entsprechende Anzahl von Momenten, die sich nach S. 38 gleichfalls durch simple Addition zusammensetzen lassen; so dass man als Gesamtwirkung sämtlicher, an einem Körper angebrachten Kräfte folgende sechs Quantitäten erhält:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + \dots &= X = \Sigma X_p \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots &= Y = \Sigma Y_p \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots &= Z = \Sigma Z_p \\ (Y_1 z_1 - Z_1 y_1) + (Y_2 z_2 - Z_2 y_2) + \dots &= L = \Sigma (Y_p z_p - Z_p y_p) \\ (Z_1 x_1 - X_1 z_1) + (Z_2 x_2 - X_2 z_2) + \dots &= M = \Sigma (Z_p x_p - X_p z_p) \\ (X_1 y_1 - Y_1 x_1) + (X_2 y_2 - Y_2 x_2) + \dots &= N = \Sigma (X_p y_p - Y_p x_p) \end{aligned}$$

wo durch das vorgesetzte Summenzeichen Σ und durch die an die drunter stehenden Buchstaben angehängten Indices p die Summe aller analogen Terme ausgedrückt sein soll, welche man erhält, wenn man diesem Index p allmählig alle Werthe: $1, 2, 3, \dots, n$ d. h. so viele Werthe zuertheilt, als verschiedene Kräfte an dem Körper wirken.

Da nun offenbar in einem praktischen Fall nicht die einzelnen Seiten-

kräfte X, Y, Z , sondern die ganze Kraft P und deren Richtung, natürlich durch ihre Neigungswinkel α, β, γ gegen die drei Coordinaten-Axen, gegeben ist, so wird es auch zweckmässig sein, die genannten Ausdrücke in der hiernach sich ergebenden Form vor Augen zu haben. Es wird alsdann:

$$X = \sum P_p \cdot \cos \alpha_p$$

$$Y = \sum P_p \cdot \cos \beta_p$$

$$Z = \sum P_p \cdot \cos \gamma_p$$

$$L = \sum P_p \cdot (z_p \cdot \cos \beta_p - y_p \cdot \cos \gamma_p)$$

$$M = \sum P_p \cdot (x_p \cdot \cos \gamma_p - z_p \cdot \cos \alpha_p)$$

$$N = \sum P_p \cdot (y_p \cdot \cos \alpha_p - x_p \cdot \cos \beta_p)$$

Die hiernach erhaltenen drei Kräfte X, Y, Z in den drei rechtwinkligen Coordinaten-Axen lassen sich nach S. 31 in eine einzige R zusammensetzen, welche die Diagonale des von jenen gebildeten Parallelepipeds, also $= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ ist; und ebenso lassen sich die drei in den drei Coordinaten-Ebenen resultirenden Kräftepaare, deren Momente L, M, N sind, nach S. 45 f. in ein einziges Paar vereinigen, dessen Moment G heissen soll, und welches nach der angezogenen Stelle $= \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$ ist.

Man gelangt also schliesslich zu einer einzigen Kraft R und einem einzigen Kräftepaar G .

Soll nun das ganze System im Gleichgewicht sein, so haben wir schon S. 47 angemerkt, dass eine einzelne Kraft nicht einem Kräftepaar das Gleichgewicht halten kann, dass demnach R für sich und auch G für sich gleich Null werden muss. Hieraus folgt aber wieder sogleich, da jede dieser beiden Grössen die Summe von drei Quadraten ist, dass jeder ihrer Summanden gleich Null sein müsse, wodurch sich diese sechs Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts ergeben:

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots = X = 0,$$

$$P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \dots = Y = 0,$$

$$P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \dots = Z = 0,$$

$$P_1 (z_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \gamma_1) + \dots = L = 0,$$

$$P_1 (x_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \alpha_1) + \dots = M = 0,$$

$$P_1 (y_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \beta_1) + \dots = N = 0,$$

d. h. damit Gleichgewicht statfinde, muss die Summe der

Composanten der gegebenen Kräfte in jeder der drei Axen und auch die Summe der Kräftepaare in jeder der drei Coordinaten-Ebenen, jedes für sich gleich Null sein.

Findet nun aber zweitens nicht Gleichgewicht statt, werden also diese eben genannten Gleichungen nicht erfüllt, so wäre es vielleicht möglich, dass sich sämtliche wirkende Kräfte auf eine einzige Kraft, welche R , so wie ihre Neigungswinkel gegen die drei Coordinaten-Axen α, β, γ (ohne Index) und die Coordinaten ihres Anheftungspunkts x, y, z (ebenfalls ohne Index) heissen mögen, zurückführen liessen. Wenn eine solche ersetzende Kraft wirklich vorhanden ist, so muss, wenn zu den ursprünglich gegebenen Kräften eben diese Kraft in gerade entgegengesetztem Sinn hinzugefügt wird, das Gleichgewicht hergestellt werden. Als dann werden aber, indem X, Y u. s. w. ihre vorige Bedeutung als Summen von gewissen Grössen beibehalten, folgende Bedingungsgleichungen stattfinden müssen:

$$X - R \cos \alpha = 0$$

$$Y - R \cos \beta = 0$$

$$Z - R \cos \gamma = 0$$

$$L - R (z \cos \beta - y \cos \gamma) = 0$$

$$M - R (x \cos \gamma - z \cos \alpha) = 0$$

$$N - R (y \cos \alpha - x \cos \beta) = 0$$

Durch Quadrirung und Addirung der drei ersten Gleichungen ergibt sich

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

und hieraus dann: $\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$,

$$\cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe gehn die drei letzten Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts in folgende über:

$$L - Yz + Zy = 0,$$

$$M - Zx + Xz = 0,$$

$$N - Xy + Yx = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, dass hieraus keine bestimmten Werthe

für x, y, z d. h. für die Coordinaten des Anheftungspunkts der Resultante erhalten werden können und dass überhaupt diese drei Gleichungen nur dann neben einander bestehen können, wenn der Bedingung

$$LX + MY + NZ = 0$$

genügt wird. — Wird nun aber diese Bedingung erfüllt, so bedeuten diese drei Gleichungen eine gerade Linie und zwar einzeln die respectiven Projectionen auf die yz, zx, xy Ebenen. Dieses hat natürlich einen ganz ordentlichen Sinn; denn da es bekanntlich gleichgiltig ist, in welchem Punkt einer geraden Linie eine Kraft angebracht wird, so darf man auch keinen einzelnen Anheftungspunkt der Resultante erwarten, sondern nur eine gerade Linie, welche die Richtung derselben angibt. Obige drei Gleichungen bilden also die Gleichung der Resultante. Diese drei Gleichungen haben aber nur dann Giltigkeit und es existirt also nur dann eine Resultante, wenn der Gleichung $LX + MY + NZ = 0$ genügt wird. Dieses wird daher die Bedingung sein, welche erfüllt werden muss, damit dem gegebenen System von Kräften durch eine einzige Kraft R das Gleichgewicht gehalten werden könne, oder dass jene Kräfte eine Resultante haben. Man muss hier aber noch einen speciellen Fall ausschliessen, nämlich den, dass X, Y, Z jedes für sich $= 0$ wird, dann würde R ebenfalls $= 0$ und es müssten sich die drei Kräftepaare unter einander das Gleichgewicht halten, was nicht anders möglich ist, als wenn jedes einzelne für sich $= 0$ ist. — Der zweite exceptionelle Fall, dass jedes der drei Momente L, M, N für sich gleich Null würde, hat hier keinen wesentlichen Einfluss, da hierbei die Resultante R immer einen endlichen Werth haben könnte.

Wenn aber der erste specielle Fall nicht stattfindet, so gibt es eine bestimmte Resultante und deren Richtung wird durch ihre Durchschnittspunkte mit den drei Coordinaten-Ebenen bestimmt, indem sich die Coordinaten dieser Durchschnittspunkte in den respectiven Ebenen in folgender Weise ergeben:

in der xy Ebene, wenn man $z = 0$ setzt: $y = -\frac{L}{Z}, x = \frac{M}{Z},$

in der yz Ebene, wenn man $x = 0$ setzt: $z = -\frac{M}{Z}, y = \frac{N}{X},$

in der zx Ebene, wenn man $y = 0$ setzt: $x = -\frac{N}{Y}, z = \frac{L}{Y}.$

Auch selbst aus diesen allgemeinen Werthen der Coordinaten des Durchschnittspunkts der Resultante mit den drei Coordinaten-Ebenen ergibt sich unmittelbar, dass bei dem vorhin ausgeschlossenen Fall keine Resultante existiren kann; denn wenn, wie es dort präsumirt wurde, X , Y , Z , jedes für sich $= 0$ wäre, so würden sämtliche hier erhaltene Coordinaten des Anheftungspunkts der Resultante unendlich gross werden, d. h. es würde die Richtung der Resultante selbst in die Unendlichkeit fallen, was offenbar keinen verständlichen, endlichen Sinn gewährt.

Scholie. Es dürfte nicht ohne Interesse sein, hier folgende Bemerkung mit beizufügen. Wenn L , M , N in dem (S. 45) angegebenen Sinn die Axen der resultirenden Kräftepaare in den drei Coordinaten-Ebenen bedeuten und wenn man durch λ , μ , ν die Winkel bezeichnet, welche die Axe des aus diesen resultirenden Kräftepaars G mit den drei rechtwinkligen Coordinaten-Axen bildet, so erhält man nach S. 46:

$$\cos \lambda = \frac{L}{G}, \cos \mu = \frac{M}{G}, \cos \nu = \frac{N}{G}.$$

Wenn zweitens die Winkel der aus den einfachen Kräften X , Y , Z hervorgehenden Resultante R mit denselben drei Axen durch α , β , γ bezeichnet sind, so wird nach S. 32:

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \cos \beta = \frac{Y}{R}, \cos \gamma = \frac{Z}{R}.$$

Drittens ist aber S. 48 bemerkt worden, dass einem Kräftepaar und einer einzelnen Kraft R nur in dem einzigen Fall durch eine gleiche und entgegengesetzt wirkende Kraft $-R$ (die beiläufig in einer entsprechenden Entfernung, d. h. an einem entsprechenden Hebelarm angebracht ist) das Gleichgewicht gehalten werden kann, wenn Kraft und Kräftepaar in einerlei Ebene wirken.

Hieraus folgt, dass die Axe G , als senkrecht stehend auf der Ebene des resultirenden Kräftepaars, mit der resultirenden R einen rechten Winkel machen, dass man also nach einem bekannten Satz der analytischen Geometrie folgende Bedingungsgleichung haben müsse:

$$\cos \lambda \cdot \cos \alpha + \cos \mu \cdot \cos \beta + \cos \nu \cdot \cos \gamma = 0$$

oder indem man die vorhin genannten Werthe der Cosinusse einsetzt:

$$L \cdot X + M \cdot Y + N \cdot Z = 0,$$

welches die oben angegebene Bedingungsgleichung für die Möglichkeit einer einzigen Resultante mehrerer gegebenen Kräfte war.

Besondere Bemerkung. Die drei letzten Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts, $L=0$, $M=0$, $N=0$, welche die Annullirung der resultirenden Kräftepaare in den drei Coordinaten-Ebenen aussprechen, lassen sich noch in andre Form und in andre Ausdrucksweise bringen. Denn nimmt man (um die Deduction der schon einmal benutzten Figur XVII anzupassen) z. B. einen Term aus der zweiten der obigen Bedingungsgleichungen heraus, also:

$$P_1 x_1 \cos \gamma_1 - P_1 z_1 \cos \alpha_1$$

so bedeuten diese Glieder, einzeln betrachtet, nichts Anderes als respective die Momente der Kräfte $Z_1 = P_1 \cos \gamma_1$ und $X_1 = P_1 \cos \alpha_1$ in Bezug auf den Punkt C , d. h. in Bezug auf denjenigen Punkt, in welchem die durch die Richtungen der beiden genannten Kräfte (welche die in den Richtungen der beiden Coordinaten-Axen liegenden Composanten der Kraft P_1 sind) gelegte Ebene $B_1 DCG$ die Y-Axe rechtwinklig trifft. Diese beiden Kräfte Z_1 und X_1 lassen sich natürlich in eine einzige resultirende Kraft vereinigen, welche

$$= \sqrt{Z_1^2 + X_1^2} = \sqrt{P_1^2 \cdot \cos^2 \gamma_1 + P_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1}$$

oder, da im Allgemeinen $\cos^2 \alpha^2 + \cos^2 \beta^2 + \cos^2 \gamma^2 = 1$ ist,

$$= P_1 \cdot \sin \beta_1$$

sein wird. Diese Resultante mag für einen Augenblick durch U bezeichnet werden und nach $B_1 U$ gerichtet sein. Sie ist nothwendig die Projection der Kraft P_1 auf die Ebene $B_1 DCG$. Wenn man nun weiter geht und von dem Durchschnittspunkt C nach dem Anheftungspunkte B_1 eine gerade Linie und auf dieser in B_1 eine senkrechte KL errichtet; hierauf die Kräfte $Z_1 = P_1 \cos \gamma_1$ und $X_1 = P_1 \cos \alpha_1$, so wie auch deren Resultante $U = P_1 \sin \beta_1$, jede in zwei Seitenkräfte nach den Richtungen $B_1 C$ und KL zerlegt, so werden die drei Composanten in jeder der beiden Richtungen sich das Gleichgewicht halten müssen. Es werden aber dieselben in der Richtung von KL :

$$Z_1 \cdot \cos Z_1 B_1 K, X_1 \cdot \cos X_1 B_1 L \text{ und } U \cdot \cos U B_1 L$$

Nun ist aber der Winkel $Z_1 B_1 K = B_1 CD$, sein Cosinus also $= \frac{CD}{CB_1} = \frac{x_1}{CB_1}$;

ebenso $\angle X_1 B_1 L = B_1 C G$, der Cosinus also $= \frac{CG}{CB_1} = \frac{z_1}{CB_1}$ und

$\angle UB_1 L = CB_1 H = 90^\circ - B_1 C H$, also $\cos UB_1 L = \sin B_1 C H = \frac{CH}{CB_1} = \frac{p_1}{CB_1}$,

wenn man das von C auf die Richtung der Resultante U gefällte Perpendikel $CH = p_1$ setzt. Setzt man jetzt diese Ausdrücke und auch die oben angegebenen Werthe für Z_1 , X_1 , U ein, so werden die drei nach KL gerichteten Kräfte:

$$\frac{P_1 x_1 \cos \gamma_1}{CB_1}, \frac{P_1 z_1 \cos \alpha_1}{CB_1}, \frac{P_1 p_1 \sin \beta_1}{CB_1}.$$

Diese drei Kräfte müssen sich das Gleichgewicht halten, und da auch schon aus der Beschaffenheit der Construction nothwendig folgt, dass die eine von ihnen auf die eine Seite von B_1 und die andern beiden auf die andre Seite fallen, so muss die eine gleich der Differenz der beiden andern sein; man wird daher erhalten:

$$\frac{P_1 x_1 \cos \gamma_1}{CB_1} - \frac{P_1 z_1 \cos \alpha_1}{CB_1} = \frac{P_1 p_1 \sin \beta_1}{CB_1}$$

oder:

$$P_1 x_1 \cos \gamma_1 - P_1 z_1 \cos \alpha_1 = P_1 p_1 \sin \beta_1.$$

Es ist aber $P_1 \sin \beta_1$ die Projection der Kraft P_1 auf die xz Ebene und p_1 ist zugleich die kürzeste Distanz der Y Axe von dieser Projection, daher wird $P_1 p_1 \sin \beta_1$ das, was man das Moment der Kraft P_1 in Bezug auf die Axe Y nennt.

Die drei letzten Gleichungen des Gleichgewichts können daher auch so ausgesprochen werden: Es müssen die Summen der Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf jede der drei rechtwinkligen Coordinatenaxen gleich Null sein.

Corollar. Ein ganz specieller Fall für die Bestimmung des Gleichgewichts gegebener Kräfte darf hier nicht übergangen werden. Es ist nämlich der, wenn sämtliche Kräfte in unter einander parallelen Richtungen wirken.

Es ist offenbar gestattet, das Coordinaten-System sich so gelegt zu denken, dass die gemeinsame Richtung der wirkenden Kräfte parallel mit einer der drei Axen, z. B. mit der Z Axe, geht. Unter dieser Voraus-

setzung haben wir natürlich in obigen sechs Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts alle Winkel α und β , das sind die Winkel der Richtung der Kräfte mit der X und Y Axe gleich einem rechten Winkel, ihre Cosinusse also $=0$ und alle Winkel γ , d. h. die Winkel der Richtung der Kräfte mit der Z Axe $=0$, also ihre Cosinusse $=1$ zu setzen. Hiernach reduciren sich diese sechs Gleichungen auf nur folgende drei:

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots = 0$$

$$P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots = 0$$

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots = 0$$

Die beiden letzten Gleichungen geben zunächst zwei Kräftepaare, das eine parallel mit der yz Ebene, das andre parallel mit der xz Ebene, die sich beide wieder in eines vereinigen lassen, welches, für den Fall des Gleichgewichts, verschwinden muss. Da aber ein resultirendes Kräftepaar nicht anders verschwinden kann, als wenn jedes der beiden componirenden Paare für sich der Null gleich wird, so erhält man die beiden obigen Summen einzeln $= 0$.

Hiernach können wir folgenden Satz aussprechen:

Parallele Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn die Summe aller Kräfte $= 0$ ist, und auch die Summen der Momente in Bezug auf zwei sich schneidende Ebenen, die parallel mit der Richtung der Kräfte sind, $= 0$ sind.

In der hier angewandten Deduction stehn zwar noch beide Ebenen auf einander senkrecht. Es bleibt aber dasselbe Gesetz bestehn, wenn dieselben auch irgend einen andern Winkel (nur nicht $= 0$) mit einander bilden; man muss alsdann nur unter x und y die schiefwinkligen Coordinaten der einzelnen Anheftungspunkte verstehn.

Wenn nun ferner die Kräfte sich nicht das Gleichgewicht hielten, dieses aber durch Hinzufügung der Kraft $-R$ in dem Punkt x, y hergestellt werden könnte, so ergeben sich zur Bestimmung dieser Resultante nach S. 61 folgende Gleichungen:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

$$Ry = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots$$

$$Rx = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots$$

Es ergibt sich natürlich kein bestimmter Werth für die z Coordinate

des Anheftungspunkts der Resultante, sondern nur eine auf der xy -Ebene senkrechte Linie, die in den respectiven Entfernungen

$$y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots}$$

$$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots}$$

parallel mit der xz - und yz -Ebene geht.

Hierbei dürfte es zweckmässig sein, eine analoge Bemerkung beizufügen, wie wir sie S. 21 gemacht haben. Denken wir uns nämlich das ganze System von Kräften so gedreht, dass ihre Anheftungspunkte dieselben bleiben, und ihre Richtungen auch wieder, obwohl in andrer Lage, unter einander parallel gehn, so erhalten wir wieder eine gewisse gerade Linie als Richtung der Resultante. Es ist leicht ersichtlich, dass alle diese Resultanten bei den verschiedenen Lagen sich in einem und demselben Punkte schneiden werden, dessen Coordinaten sich leicht bestimmen lassen. Denken wir uns nämlich das System so gedreht, dass alle Kräfte parallel mit der Y -Axe gehn, so erhalten wir:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

$$z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots}$$

$$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots}$$

Nehmen wir hierzu noch den vorhin gefundenen Werth von y , so ist der Punkt, welchen man den Mittelpunkt der parallelen Kräfte nennt, vollständig bestimmt.

§. 9.

In den vorigen §§. sind die Bedingungen entwickelt, welche erfüllt werden müssen, damit ein Körper oder ein System von Punkten, auf welches beliebige Kräfte wirken, im Gleichgewicht gehalten werde; oder, wenn dieses nicht stattfand, wurden die nöthigen Bestimmungsstücke der Resultante, sobald eine solche möglich war, angegeben. Hierbei wurde stets stillschweigend angenommen, dass der Körper vollkommen frei und einzig und allein dem Einfluss der an ihm angebrachten und auf ihn wirkenden Kräfte unterworfen sei. Nun können aber offenbar solche Umstände obwalten, die einen augenscheinlichen Einfluss auf den Zustand

eines Körpers (in Rücksicht auf Ruhe oder Bewegung desselben) ausüben, ohne geradezu als besondere Kräfte aufzutreten. Hierher wäre zu rechnen: ein fester Punkt, oder eine feste Linie innerhalb des Körpers, oder eine Oberfläche oder Curve, auf welcher der Körper zu bleiben verpflichtet ist. Dieses soll jetzt in seinen Einzelheiten durchgenommen werden.

1) Gleichgewicht eines Körpers, welcher die Freiheit hat, sich in jedem beliebigen Sinn um einen festen Punkt zu drehen.

Wenn es in einem Körper einen solchen Punkt gibt, um welchen sich derselbe in beliebiger Richtung soll drehen können, so heisst dieses doch offenbar, dass diesem Punkt die Befähigung zugeschrieben wird, stets dieselbe Stelle im Raum beizubehalten, oder dass er allen äussern Einwirkungen einen bestimmten Widerstand entgegenstellt. Diesen Widerstand werden wir uns als eine gewisse dem Punkt innewohnende oder in ihm wirkende Kraft denken können, die durch ϱ bezeichnet werden mag. Fügen wir nun diese unbekannte Kraft zu den übrigen auf den Körper einwirkenden Kräften hinzu, so werden wir von der angenommenen Festigkeit des einzelnen Punktes abstrahiren und den Körper als vollkommen frei betrachten und deshalb die obigen (S. 61) gefundenen allgemeinen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts auf ihn anwenden können. Nehmen wir daher den festen Punkt zum Anfangspunkt der Coordinaten und nennen wir ξ , η , ζ die drei rechtwinkligen Componenten der Kraft ϱ , so werden, mit Benutzung der an angezogener Stelle angewandten Bezeichnung, folgende Gleichungen gelten:

$$X + \xi = 0, \quad Y + \eta = 0, \quad Z + \zeta = 0;$$

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Da nun aber der fragliche Punkt als fest angenommen ist, so wird die seinen Widerstand repräsentirende Kraft ϱ , also auch deren Componenten ξ , η , ζ , ganz beliebig grosse Quantitäten sein können; es wird daher den drei ersten der genannten Gleichungen unter allen Umständen durch passende Annahme dieser Grössen ξ , η , ζ genügt werden können. Es wird daher für das Gleichgewicht eines Körpers, der die Freiheit hat, sich um einen festen Punkt zu drehen, nur die Erfüllung dieser drei Gleichungen erforderlich sein:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

d. h. es müssen die Momente der Kräfte in Bezug auf jede der drei rechtwinkligen Axen gleich Null sein.

Der Widerstand, den der feste Punkt zu leisten hat, oder der Druck, den er erleidet, ist natürlich $= -\varrho$, oder, nach der Richtung der drei Axen geschätzt:

$$-\xi = X, -\eta = Y, -\zeta = Z.$$

2) Gleichgewicht eines Körpers, welcher die Freiheit hat, sich um eine feste gerade Linie zu drehen.

Die Drehungsaxe können wir uns als eine gerade Linie denken, welche zwei feste Punkte verbindet, so dass wir in Stelle einer festen Linie diese einfachere Vorstellung gewinnen: es seien in dem System zwei feste Punkte gegeben. Nennt man nun diese beiden festen Punkte A und B , deren Entfernung von einander $= d$, und nimmt den einen Punkt, etwa A , zum Anfangspunkt der Coordinaten und die Linie AB zur X Axe, so werden wir die Widerstände, welche die beiden Punkte leisten, als zwei Kräfte ϱ und ϱ' betrachten können, welche in diesen Punkten wirken. Die Kraft ϱ , welche im Anfangspunkt A der Coordinaten wirkt, zerlegt sich augenblicklich in drei Seitenkräfte ξ, η, ζ , welche nach den Axen selbst gerichtet sind; die zweite Kraft ϱ' im Punkt B zerlegt sich in drei mit den Axen parallele Seitenkräfte ξ', η', ζ' . Die Composante ξ' , welche schon in der X Axe selbst liegt, lässt sich unmittelbar in dem Anfangspunkt angebracht denken, die beiden andern aber η' und ζ' geben, wenn man sie nach A überträgt, erstlich in den beiden Axen die Kräfte η' und ζ' , und ausserdem in der xy - und xz -Ebene zwei Kräftepaare mit den respectiven Momenten $\eta'.d$ und $\zeta'.d$. — Da wir nun nach Hinzufügung dieser beiden Kräfte ϱ und ϱ' das System als ein ganz freies betrachten und deshalb die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts darauf anwenden können, so erhalten wir:

$$X + \xi + \xi' = 0, \quad Y + \eta + \eta' = 0, \quad Z + \zeta + \zeta' = 0$$

$$L = 0, \quad M + \zeta'.d = 0, \quad N - \eta'.d = 0$$

Da alle sechs Gleichungen, mit alleiniger Ausnahme von $L = 0$, durch passende Annahme der Kräfte ϱ und ϱ' stets erfüllt werden können, so sieht man, dass ein Körper, der die Freiheit hat, sich um eine Axe zu drehen, im Gleichgewicht sein wird, wenn

$$L = 0,$$

d. h. wenn die Summe der Momente aller Kräfte in Bezug auf die X Axe, d. i. in Bezug auf die Drehungsaxe, gleich Null ist.

Zur Bestimmung des Drucks, den die beiden festen Punkte in den Richtungen der einzelnen Axen erleiden, ergibt sich

$$-\eta' = -\frac{N}{d}; \quad -\zeta' = \frac{M}{d},$$

$$-\eta = Y - \frac{N}{d}; \quad -\zeta = Z + \frac{M}{d},$$

$$-(\xi + \xi') = X.$$

Hier ersieht man, dass sich in der Richtung der X Axe der Druck auf die beiden Punkte nicht für jeden besonders ergibt, sondern nur der Summe nach, was auch in der Natur der Sache begründet ist, da beide Punkte, als mit einander auf unveränderliche Weise verbunden, eigentlich nur ein Ganzes bilden.

3) Gleichgewicht eines Körpers, welcher sich in einem oder in mehreren Punkten gegen eine feste Ebene stützt.

Wir nehmen diese feste Ebene zur xy Ebene an und setzen zunächst voraus, dass der Körper nur in einem einzigen Punkt A auf die Ebene drückt. Wählen wir noch diesen Punkt zum Anfangspunkt der Coordinaten, so wird der Widerstand durch eine Kraft zu ersetzen sein, welche nur in der Richtung der Z Axe wirkt; deshalb werden die Bedingungengleichungen des Gleichgewichts eines solchen Körpers folgende:

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z+\zeta=0,$$

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0.$$

Es müssen also die beiden ersten und die drei letzten Bedingungen stets erfüllt werden, während der dritten stets durch die beliebig anzunehmende Kraft ζ genügt werden kann.

Wenn sich zweitens ein Körper in zwei Punkten A und B gegen eine Ebene stützt, so nehme man wieder diese Ebene zur xy Ebene, die Linie AB zur X Axe und A zum Anfangspunkt der Coordinaten an. Der Widerstand des Punktes A wird eine Kraft ζ geradezu in der Z Axe geben, der Widerstand des Punktes B gibt zunächst eine Kraft ζ' in der xz Ebene, parallel mit der Z Axe, oder wenn man sie nach A hin verlegt, eine Kraft ζ' in der Z Axe selbst und ein Kräftepaar in der xz Ebene mit dem Mo-

ment $\zeta' \cdot a'$, wenn die Entfernung des Punktes B von A durch a' bezeichnet wird. Hiernach werden die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts

$$\begin{aligned} X=0, \quad Y=0, \quad Z+\zeta+\zeta'=0, \\ L=0, \quad M+\zeta' \cdot a'=0, \quad N=0. \end{aligned}$$

Die auf den Körper wirkenden Kräfte X, Y, Z haben hier offenbar eine Resultante $=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=-(\zeta+\zeta')$; die Bedingungsgleichung dafür wird auch erfüllt, da $XL+YM+ZN=0 \cdot 0-0 \cdot \zeta' a'-0 \cdot (\zeta+\zeta')=0$ ist. Diese Resultante steht offenbar, weil $X=0$ und $Y=0$ ist, senkrecht auf der xy Ebene, die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes mit dieser sind nach S. 62:

$$\begin{aligned} x &= \frac{M}{Z} = \frac{\zeta'}{\zeta+\zeta'} \cdot a' \\ y &= -\frac{L}{Z} = 0, \end{aligned}$$

d. h. die Resultante trifft die Linie AB zwischen den Punkten A und B , weil $\frac{\zeta'}{\zeta+\zeta'} \cdot a'$ ein echter Bruch ist.

Wenn endlich der Körper sich in drei oder mehreren Punkten gegen eine Ebene stützt, so sei wieder diese Ebene die xy Ebene, der erste Punkt, welcher A heissen mag, der Anfangspunkt der Coordinaten; ferner werde die Verbindungslinie von A mit dem nächsten Punkt B als die X Axe angenommen, und zwar unter der Voraussetzung, dass alle folgenden Punkte auf einer und derselben Seite von der Linie AB liegen, damit alle Y Coordinaten jener Punkte positive Grössen werden; ebenso wie auch der Anfangspunkt A so gewählt sein soll, dass alle X Coordinaten der übrigen Punkte positiv sind. Indem man nun natürlich den Widerstand jedes einzelnen Stützpunkts als senkrecht gegen die xy Ebene annehmen muss, so wird, wenn man jeden dieser Punkte $B, C, D, \dots$ durch ihre Coordinaten $a', b'; a'', b''; \dots$ bezeichnet, jede einzelne der den entsprechenden Widerstand ersetzenden Kräfte, nach ihrer Uebertragung nach dem Anfangspunkt der Coordinaten, ersetzt werden durch folgende drei Stücke: 1) eine ihr gleiche Kraft im Anfangspunkt A der Coordinaten, und zwar wirkend in der Z Axe selbst, 2) ein Kräftepaar in der yz Ebene, bei welchem diese selbe Kraft an einem Hebelarm, gleich

der y Coordinate des entsprechenden Punktes wirkt, 3) ein Kräftepaar in der xz Ebene, bei welchem dieselbe Kraft an einem Hebelarm, gleich der x Coordinate des entsprechenden Punktes wirkt. Indem wir nun theils die Kräfte in der einzelnen Axe, theils die Kräftepaare in den einzelnen Coordinatenebenen zusammensetzen, erhalten wir folgende erforderlichen Bedingungsgleichungen eines sich gegen eine beliebige Anzahl von gegebenen Punkten einer Ebene stützenden Körpers:

$$X=0, Y=0, Z+\zeta+\zeta'+\zeta''+\zeta'''+\dots=0;$$

$$L-\zeta''\cdot b''-\zeta'''\cdot b'''+\dots=0, M+\zeta'\cdot a'+\zeta''\cdot a''+\dots=0, N=0;$$

von denen natürlich nur die beiden ersten und die letzte durch die auf den Körper frei wirkenden Kräfte erfüllt werden dürfen, da die dritte, vierte und fünfte durch die Willkürlichkeit der Kräfte ζ stets erfüllt werden können. Wenn hier eine unbestimmte Anzahl von Stützpunkten des Körpers angenommen wird, so ist leicht aus der Form dieser Gleichungen ersichtlich, dass der Widerstand, den jeder einzelne dieser Stützpunkte zu leisten, oder der Druck, den jeder dieser Punkte zu erdulden hat, oder die Grösse der einzelnen Kräfte ζ nicht zu bestimmen sein wird, sondern in der Regel nur die Summe derselben. Nur in dem einzigen Fall, wenn nicht mehr als drei Stützpunkte angenommen werden, haben wir die nöthige Anzahl von drei Gleichungen zur Bestimmung der drei unbekannten Kräfte, nämlich:

$$Z+\zeta+\zeta'+\zeta''=0,$$

$$L-\zeta''\cdot b''=0,$$

$$M+\zeta'\cdot a'+\zeta''\cdot a''=0,$$

woraus man erhält:

$$\zeta''=\frac{L}{b''},$$

$$\zeta'=-\frac{M}{a'}-\frac{L\cdot a''}{b''\cdot a'},$$

$$\zeta=-Z+\frac{M}{a'}+\frac{L(a''-a')}{b''\cdot a'}.$$

Da die auf den Körper frei wirkenden Kräfte offenbar eine Resultante haben müssen, weil der Bedingung $XL+YM+ZN=0$ genügt wird und

$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=-(\zeta+\zeta'+\zeta'')$, also ≥ 0 ist, so ergeben sich nach

S. 62 die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser Resultante mit der xy Ebene:

$$y = -\frac{L}{Z} = \frac{\zeta''}{\zeta + \zeta' + \zeta''} \cdot b'',$$

$$x = \frac{M}{Z} = \frac{\zeta' \cdot a' + \zeta'' \cdot a''}{\zeta + \zeta' + \zeta''}.$$

Denkt man sich nun z. B. die Lage der drei Punkte A, B, C so, wie sie in Fig. XVIII. verzeichnet ist, wo also $AB = a', AD = a'', CD = b''$ be-

deuten, so folgt, da $\frac{\zeta''}{\zeta + \zeta' + \zeta''}$ und auch $\frac{\zeta' + \zeta''}{\zeta + \zeta' + \zeta''}$ nothwendig ein echter Bruch und $a' > a''$ ist:

$$y = \frac{\zeta''}{\zeta + \zeta' + \zeta''} \cdot b'' < b'',$$

$$x = \frac{\zeta' \cdot a' + \zeta'' \cdot a''}{\zeta + \zeta' + \zeta''} < \frac{\zeta' \cdot a' + \zeta'' \cdot a'}{\zeta + \zeta' + \zeta''} < a'.$$

Dieses heisst doch aber natürlich nichts Anderes, als dass die hier gefundenen Coordinaten des Durchschnittspunkts der Resultante mit der xy Ebene respective kleiner als die Höhe CD und kleiner als die Grundlinie AB des in der Figur verzeichneten Dreiecks ABC sind, dass also dieser Punkt innerhalb dieses Dreiecks ABC fällt.

Hierdurch ergibt sich rückwärts, wenn auf einen Körper, der sich gegen drei Punkte einer Ebene stützt, beliebige Kräfte wirken, so wird der Körper im Gleichgewicht stehn, sobald die Resultante derselben die stützende Ebene innerhalb des von den drei Stützpunkten gebildeten Dreiecks trifft. Der Druck, den alle drei Stützpunkte erleiden, ist durch die vorhin gefundenen Werthe der drei Grössen ζ, ζ', ζ'' gegeben; wenn mehr als drei Stützpunkte vorhanden sind, so vertheilt sich der Druck auf die einzelnen Punkte nach keinem bestimmten Gesetz.

4) Wenn sämtliche Kräfte nur auf einen einzigen Punkt wirken, so reduciren sich die sechs allgemeinen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts nur auf die ersten drei: $X=0, Y=0, Z=0$, wie es schon S. 31 angegeben wurde.

Setzen wir nun den speciellen Fall, dass der sollicitirte Punkt nicht ganz frei ist, sondern

a) dass er verpflichtet ist, stets auf einer gegebenen Oberfläche, deren Gleichung $L=0$ sein mag, zu bleiben,

dass er sich also in einem gegebenen Punkt gegen diese Oberfläche stütze, so werden wir von dieser Bedingung genügende Rechnung tragen, wenn wir das Verlangen stellen, dass die Resultante sämtlicher auf den Punkt wirkenden Kräfte auf der gegebenen Oberfläche senkrecht stehe, also nach der Normale derselben gerichtet sei. Wir werden daher den Punkt als einen ganz freien betrachten können, wenn wir den Widerstand der Oberfläche durch eine ihrer Intensität nach beliebige Kraft N ersetzen, deren Richtung nur mit der der Normale zusammenfällt. Nennt man nun λ, μ, ν die Winkel, welche diese Richtung mit den drei Coordinaten-Axen bildet, so werden die rechtwinkligen Componenten der Kraft N :

$$N \cdot \cos \lambda, N \cdot \cos \mu, N \cdot \cos \nu$$

und dadurch erhält man als die im vorliegenden Fall erforderlichen Bedingungen des Gleichgewichts:

$$N \cdot \cos \lambda + X = 0,$$

$$N \cdot \cos \mu + Y = 0,$$

$$N \cdot \cos \nu + Z = 0.$$

Die Winkel λ, μ, ν , als die Winkel einer Normale für die Oberfläche $L=0$, werden nach einem bekannten Satz der analytischen Geometrie durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\cos \lambda = V \cdot \frac{dL}{dx}$$

$$\cos \mu = V \cdot \frac{dL}{dy}$$

$$\cos \nu = V \cdot \frac{dL}{dz}$$

wenn man der Abkürzung wegen

$$V = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}$$

setzt. Hierdurch gehen aber die vorigen drei Gleichungen in folgende über:

$$N \cdot V \cdot \frac{dL}{dx} + X = 0$$

$$N \cdot V \cdot \frac{dL}{dy} + Y = 0$$

$$N \cdot V \cdot \frac{dL}{dz} + Z = 0$$

woraus man nach Elimination des N erhält:

$$Y \cdot \frac{dL}{dx} - X \cdot \frac{dL}{dy} = 0$$

$$Z \cdot \frac{dL}{dx} - X \cdot \frac{dL}{dz} = 0$$

welche die beiden erforderlichen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts eines Körpers sind, der sich gegen eine Oberfläche $L=0$ stützt.

Wenn die Lage des sollicitirten Punkts nicht geradezu gegeben ist, sondern nur die Natur der auf ihn wirkenden Kräfte, so kann die Frage gestellt werden, an welche Stelle der Oberfläche der Punkt verlegt werden müsse, damit die Resultante der auf ihn wirkenden Kräfte normal zur Oberfläche wäre. — Die Antwort darauf ist ersichtlich diese, dass man aus den beiden gefundenen Gleichungen des Gleichgewichts

$$Y \cdot \frac{dL}{dx} - X \cdot \frac{dL}{dy} = 0$$

$$Z \cdot \frac{dL}{dx} - X \cdot \frac{dL}{dz} = 0$$

und aus der Gleichung der Oberfläche

$$L=0$$

die drei Coordinaten x, y, z bestimmt.

b) Wenn der sollicitirte Punkt verpflichtet ist, auf zwei Oberflächen $L=0$ und $L'=0$ zu gleicher Zeit, d. h. auf ihrer Durchschnittscurve, d. h. auf einer gegebenen Curve doppelter Krümmung zu bleiben, so wird die Resultante der auf den Punkt wirkenden Kräfte mit den beiden Normalen, die man in diesem Punkt an die Oberflächen zieht, in einerlei Ebene liegen müssen, damit sich dieselbe in zwei nach diesen Normalen gerichtete Componenten zerlegen lasse. Den Widerstand der beiden Oberflächen wird man daher durch zwei in den Normalen liegende Kräfte N und N' ersetzen können, und wenn man diese zu den übrigen Kräften hinzufügt, von den Oberflächen ganz abstrahiren und den Punkt als vollkommen frei betrachten dürfen.

Nennt man nun λ, μ, ν und λ', μ', ν' die Winkel der Normal-Kräfte N und N' mit den Axen, so wird man diese Bedingungsgleichungen erhalten:

$$N \cdot \cos \lambda + N' \cdot \cos \lambda' + X = 0$$

$$N \cdot \cos \mu + N' \cdot \cos \mu' + Y = 0$$

$$N \cdot \cos \nu + N' \cdot \cos \nu' + Z = 0$$

oder wenn man durch V' die analoge Grösse in Bezug auf die zweite Oberfläche $L'=0$ bezeichnet, als vorhin V in Bezug auf $L=0$:

$$N \cdot V \cdot \frac{dL}{dx} + N' \cdot V' \cdot \frac{dL'}{dx} + X = 0$$

$$N \cdot V \cdot \frac{dL}{dy} + N' \cdot V' \cdot \frac{dL'}{dy} + Y = 0$$

$$N \cdot V \cdot \frac{dL}{dz} + N' \cdot V' \cdot \frac{dL'}{dz} + Z = 0$$

woraus man durch Elimination von N und N' erhält:

$$\begin{aligned} & X \cdot \left\{ \frac{dL}{dy} \cdot \frac{dL'}{dz} - \frac{dL}{dz} \cdot \frac{dL'}{dy} \right\} \\ & + Y \cdot \left\{ \frac{dL}{dz} \cdot \frac{dL'}{dx} - \frac{dL}{dx} \cdot \frac{dL'}{dz} \right\} \\ & + Z \cdot \left\{ \frac{dL}{dx} \cdot \frac{dL'}{dy} - \frac{dL}{dy} \cdot \frac{dL'}{dx} \right\} = 0, \end{aligned}$$

welche die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts eines Punktes ist, welcher verpflichtet ist, auf einer Curve doppelter Krümmung zu bleiben.

Wenn dem sollicitirten Punkt noch nicht eine feste Stelle auf der gegebenen Curve doppelter Krümmung angewiesen ist, sondern wenn es erst bestimmt werden soll, wo er sich auf derselben befinden muss, damit die Resultante der ihrer Natur nach gegebenen Kräfte mit den Normalen der beiden Oberflächen in einerlei Ebene liegen, so wird man nur die soeben gefundene Gleichung des Gleichgewichts mit den Gleichungen der beiden gegebenen Oberflächen, nämlich mit $L=0$ und $L'=0$ zusammenzustellen haben, um daraus die drei Coordinaten x, y, z des gesuchten Punktes finden zu können.

Dritte Vorlesung.

Theorie des Schwerpunkts.

§. 10.

Man nennt Schwerkraft (*pesanteur* oder *gravité*) die unbekannte Ursache, welche die Körper nach der Oberfläche der Erde treibt, sobald nicht irgend welche äussern Kräfte auf sie einwirken, sondern sie sich selbst überlassen sind. Sie wohnt jedem kleinsten materiellen Theilchen des Körpers inne und strebt, denselben in senkrechter Richtung gegen die Erdoberfläche, d. h. in vertikaler Richtung fortzubewegen. Die Erfahrung hat gezeigt, dass die Intensität dieser Kraft verschieden ist in verschiedener Entfernung vom Mittelpunkt der Erde, dass sie nämlich im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung von diesem steht. Ebenso ist sie auch verschieden an verschiedenen Stellen auf der Oberfläche der Erde, unterm Aequator ist sie am geringsten, unterm Pol am grössten, sie nimmt mit dem Quadrat des Sinus der Breite zu.

Obgleich nun die Richtungen der Schwerkraft der einzelnen Elemente eines Körpers sich alle in einem bestimmten Punkt, dem Mittelpunkt der Erde, vereinigen, also, streng genommen, convergirende Linien bilden, so wird man sie doch bei allen Körpern, die auf der Erde in dieser Hinsicht der Untersuchung unterworfen werden, als parallel betrachten können, da die Entfernungen der einzelnen Punkte eines solchen Körpers im Vergleich mit der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde als verschwindend, die Winkel also, welche die Richtungen ihrer Schwerkräfte an diesem Mittelpunkt bilden, als unendlich klein anzusehn sind. Weil nun alle diese Kräfte, die auf die einzelnen materiellen Theile eines Körpers wirken, Parallel-Kräfte sind, so werden sie eine Resultante haben, die ebenfalls nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtet ist, und diese ist das, was man die Schwere, das Gewicht (*le poids*) des Körpers nennt. Bei allen Körpern ist dieses Gewicht offenbar proportional der Masse, also

$$P = g \cdot M,$$

oder auch

$$P = gDV,$$

wenn P das Gewicht, M die Masse, D die Dichtigkeit, V das Volumen des Körpers und g die Schwere der Einheit des Körpers bezeichnet.

Da alle Punkte eines schweren Körpers durch parallele Kräfte solli-

citirt werden, so folgt, dass, wenn man ihn in verschiedene Lagen in Bezug auf die Richtungen dieser Kräfte bringt, ihre Resultante beständig durch einen bestimmten Punkt geht. Diesen Punkt haben wir oben S. 21 und S. 67 Mittelpunkt der parallelen Kräfte genannt, hier heisst er der Schwerpunkt. Seine charakteristische Eigenschaft ist offenbar die, dass der zugehörige Körper in allen möglichen Lagen um denselben im Gleichgewicht bleibt, wenn nur dieser Punkt fixirt ist, weil stets die Resultante aller unendlich vielen einzelnen Schwerkkräfte stets durch ihn geht.

Es wird aber auch offenbar der Körper im Gleichgewicht bleiben müssen, wenn man einen solchen Punkt desselben in vertikaler Richtung festhält, dass dieser und der Schwerpunkt des Körpers in einerlei Vertikale liegen. Der befestigte Punkt kann entweder oberhalb vom Schwerpunkt oder unterhalb desselben liegen; im ersten Fall ist der Körper aufgehängt, im zweiten ist er unterstützt. Man könnte hiernach den Schwerpunkt eines Körpers mit Leichtigkeit auf experimentellem Wege finden, indem man ihn an verschiedenen Punkten aufhinge und den gemeinsamen Durchschnittspunkt der verschiedenen Aufhängungslinien suche; jedoch tritt hier oft die Schwierigkeit der geometrischen Construction innerhalb eines Körpers hindernd in den Weg.

§. 11.

Da die am Schluss des vorigen §. angedeutete Methode zur Bestimmung des Schwerpunkts eines Körpers nicht immer anwendbar ist, und da andrer Seits diese Bestimmung von der grössten Wichtigkeit ist, so muss ein andrer Weg eingeschlagen werden, und dieses ist der analytische.

Man wird den Schwerpunkt eines Körpers oder eines ganzen Systems von Körpern leicht finden können, wenn man die Schwerpunkte einzelner Theile desselben kennt. Denn man kann sich alsdann diese einzelnen Schwerpunkte als die Anheftungspunkte von parallelen Kräften denken, welche hier die Gewichte der einzelnen Theile sein werden, während der Schwerpunkt natürlich der Anheftungspunkt der Resultante aller dieser Componenten sein wird. Wir haben aber S. 66 zur Bestimmung der Resultante von Kräften, die alle der Z-Axe parallel gehn, folgende Gleichungen gehabt:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

$$Rx = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots$$

$$Ry = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots$$

Denkt man sich nun die Richtungen aller dieser parallelen Kräfte so geändert, dass sie parallel mit der Y-Axe gehn, so werden die analogen Gleichungen:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

$$Rx = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots$$

$$Rz = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + \dots$$

Aus diesen sechs Gleichungen, die sich natürlich auf vier reduciren, ergibt sich zunächst folgender Hilfssatz:

Die Resultante (d. i. das Gewicht oder die Masse des ganzen Körpers) ist gleich der Summe der parallelen Componenten (d. i. der Gewichte oder Massen der einzelnen Theile des Körpers) und die Momente der Resultante in Bezug auf jede der drei rechtwinkligen Coordinaten-Ebenen ist gleich der Summe der Momente der einzelnen Componenten in Bezug auf dieselbe Ebene.

Da wir aber wissen, dass, wie wir auch die Richtung der parallelen Kräfte ändern mögen, immer dasselbe in Bezug auf ein neues Coordinatensystem stattfinden wird, so werden wir umgekehrt jede beliebige Ebene im Raum als eine Coordinaten-Ebene betrachten können und dadurch folgenden ganz allgemeinen und zugleich auch ausreichenden Fundamental-Satz zur Bestimmung des Schwerpunkts eines Körpers erhalten:

Die Entfernung des Schwerpunkts eines Körpers oder eines Systems von Körpern von irgend einer Ebene ist gleich der Summe der Momente der Gewichte (oder Massen) der einzelnen Theile in Bezug auf diese Ebene, dividirt durch die Summe aller Gewichte (oder Massen).

Bestimmt man also nach diesem Gesetz die Entfernungen des Schwerpunkts von drei nicht parallelen Ebenen, so findet man offenbar die Lage desselben.

Wenn im speciellen Fall die Ebene, in Bezug auf welche die Momente genommen werden, durch den Schwerpunkt geht, so ist die Entfernung des Schwerpunkts von dieser natürlich gleich Null und man findet:

Die Summe der Momente der Massen, in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Ebene, ist immer gleich Null.

Dieses heisst in andern Worten ausgedrückt: Die Summe der Momente der Massen auf der einen Seite der Ebene ist gleich der Summe der Momente der Massen, die auf der andern Seite liegen.

Dieser Satz lässt sich auch umkehren:

Wenn die Summe der Momente der Massen in Bezug auf eine Ebene gleich Null ist, so liegt der Schwerpunkt des Systems in dieser Ebene.

Wenn alle Schwerpunkte der einzelnen Theile eines Systems in einer Ebene liegen, so wird offenbar auch der Schwerpunkt des ganzen Systems in derselben Ebene liegen, und man darf daher die Momente nur in Bezug auf zwei nicht parallele Linien in eben dieser Ebene nehmen, um die beiden erforderlichen Coordinaten des Schwerpunkts zu bestimmen. — Und liegen alle Schwerpunkte der einzelnen Theile auf einer geraden Linie, so wird auch der Schwerpunkt des ganzen Systems auf derselben Linie liegen, und man darf nur die Momente in Bezug auf eine einzige, diese Linie schneidende, Gerade nehmen, um die einzige erforderliche Coordinate des Schwerpunkts zu bestimmen.

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich durch ganz einfache Ueberlegung, so dass es nicht nöthig sein dürfte, noch besondere Erläuterungen hinzuzufügen, folgender Grundsatz:

Jede ebene oder körperliche Figuration, in welcher sich ein solcher Punkt findet, dass jede durch denselben gelegte Ebene die Figuration in zwei symmetrische Hälften theilt, hat diesen Punkt zu ihrem Schwerpunkt.

Will man hier noch einen in dem Vorigen nicht enthaltenen Grund hinzufügen, so könnte es dieser sein: Wenn eine Ebene eine Figur symmetrisch theilt, so ist kein Grund vorhanden, weshalb der Schwerpunkt eher auf der einen Seite dieser Ebene liegen sollte, als auf der andern, er wird daher in der Ebene selbst liegen; und da dasselbe für sämtliche durch den angenommenen Punkt gelegte Ebenen gilt, so wird er in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt liegen.

Unmittelbare Folgerungen dieses Grundsatzes sind folgende drei Sätze:

1) Der Schwerpunkt einer durchgängig gleichmässig beschwerten geraden Linie ist der Mittelpunkt dieser Linie.

2) Der Schwerpunkt der durchgängig gleichmässig beschwerten Fläche eines Parallelogramms ist der Durchschnittspunkt seiner beiden Diagonalen.

3) Der Schwerpunkt des durchgängig gleichmässig beschwerten Volumens eines Parallelepipedums ist der Durchschnittspunkt seiner vier Diagonalen.

§. 12.

Bevor wir zur allgemeinsten Theorie des Schwerpunkts übergehen, sollen in diesem §. die bekanntesten Schwerpunkts-Bestimmungen durchgesprochen werden, welche sich mit Leichtigkeit auf elementarem Wege aus den Sätzen des vorigen §. entwickeln lassen.

Aufg. 1. Es soll der Schwerpunkt eines Systems gleichmässig beschwerter gerader Linien (Umfang einer Figur) gefunden werden.

Aufl. Da die Linien überall gleichmässig beschwert angenommen sind, so liegt der Schwerpunkt jeder einzelnen von ihnen in ihrem Mittelpunkt. Denken wir uns immer in jedem Schwerpunkt das ganze Gewicht der zugehörigen Linie vereinigt, so erhalten wir ein System von Punkten, in welchen Kräfte wirken, die den Längen der einzelnen Linien proportional sind, und deren Richtungen unter einander parallel sind. Nennen wir nun hier, wie künftig überall, ξ , η , ζ die gesuchten Coordinaten des ganzen Systems und bedeuten für den vorliegenden Fall x , y , z mit verschiedenem Index die Coordinaten der Mittelpunkte der einzelnen Linien und l_1 , l_2 , ... die Verhältnisszahlen der Längen der einzelnen Linien, so erhält man, wenn L das Gewicht sämmtlicher Linien bedeutet, folgende Gleichungen zur Bestimmung des Schwerpunkts:

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + \dots$$

$$L \cdot \xi = l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + \dots$$

$$L \cdot \eta = l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3 + \dots$$

$$L \cdot \zeta = l_1 z_1 + l_2 z_2 + l_3 z_3 + \dots$$

Denkt man sich z. B. die drei Seiten a, b, c eines geradlinigen Dreiecks gleichmässig beschwert, so nehmen wir die eine Seite, etwa c , zur X Axe an, dann wird, indem wir unter a, b und c zugleich die Gewichte der drei Seiten verstehen, h aber das auf der Seite c senkrecht stehende Höhenperpendikel des Dreiecks bedeutet, die Entfernung des Schwerpunkts der Dreiecks-Peripherie von der X Axe, d. h. hier von der Seite c (deren eigenes Moment natürlich $= 0$ ist)

$$\begin{aligned} &= \frac{a \cdot \frac{h}{2} + b \cdot \frac{h}{2}}{a + b + c} \\ &= \frac{(a + b) \cdot h}{a + b + c} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hat aber eine besondere geometrische Bedeutung. Denn wenn man die Mitten der Seiten durch gerade Linien verbindet, so entsteht ein Dreieck, dessen eine Seite parallel mit c geht und dessen Höhe $= \frac{h}{2}$ ist. Die Seiten dieses kleinern Dreiecks sind natürlich $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ und daher der Radius seines eingeschriebenen Kreises:

$$\varrho = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{a+b+c}$$

Nun ist aber in dem grössern Dreieck

$$h = \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

mithin wird $\varrho = \frac{hc}{2(a+b+c)}$. Hiernach wird der Mittelpunkt des dem

kleinern Dreieck eingeschriebenen Kreises um das Stück:

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} - \varrho &= \frac{h}{2} - \frac{hc}{2(a+b+c)} \\ &= \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{h}{2} \end{aligned}$$

von der Seite c entfernt sein. Dieses ist aber auch der oben angegebene Abstand des Schwerpunkts der Peripherie des ganzen Dreiecks von der Seite c . Da das Analoge offenbar in Bezug auf jede Seite gilt, so hat man folgenden Satz:

Der Schwerpunkt des gleichmässig beschwerten Umfangs eines Dreiecks wird gefunden, wenn man die Mitten

der drei Seiten mit einander verbindet, wodurch wieder ein Dreieck entsteht, und wenn man alsdann den Mittelpunkt des diesem kleinern Dreieck eingeschriebenen Kreises bestimmt.

Aufg. 2. Es soll der Schwerpunkt der gleichmässig beschwerten Flächen eines Systems von ebenen, geradlinigen Figuren, die beliebig im Raume liegen, bestimmt werden.

Aufl. Da das Moment des ganzen Systems sich aus den Momenten der einzelnen Theile zusammensetzt, und da jede geradlinige Figur sich aus Dreiecken zusammensetzen lässt, so wird unsre nächste Aufgabe diese sein: Es soll der Schwerpunkt eines Dreiecks gefunden werden.

Wenn man sich die Fläche des Dreiecks überall gleich belastet denkt, so muss bei jeder Linie, die man parallel mit einer Dreiecksseite zieht, die also auch durchweg gleichmässig belastet ist, der Schwerpunkt in ihrer Mitte liegen; zieht man daher beliebig viele Linien parallel mit einer Seite, so liegen die Schwerpunkte aller dieser auf ihren Mitten, d. h. alle auf derjenigen Linie, welche die gegenüberliegende Spitze mit der Mitte dieser Seite verbindet. Da nun auf diese Weise die Schwerpunkte aller parallelen Theile des Dreiecks auf dieser Linie liegen und dadurch das Gewicht des ganzen Dreiecks auf diese Linie übertragen ist, so wird auch der Schwerpunkt des ganzen Dreiecks nach S. 80 auf dieser Linie liegen müssen. Dieses Raisonement wird sich offenbar in Bezug auf alle Parallelen mit jeder der drei Seiten des Dreiecks anstellen lassen, so dass wir zu dem nothwendigen Schluss gedrängt werden, dass der Schwerpunkt des Dreiecks auf jeder der drei Linien liegen muss, die man von den Ecken des Dreiecks nach den Mitten der Gegenseiten zieht. Diese schneiden sich aber bekanntlich in Einem Punkt, und deshalb muss dieser der Schwerpunkt des Dreiecks sein.

Nun werden aber, aus hinlänglich bekannten geometrischen Gründen, diese genannten Linien in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt nach dem Verhältniss von 1:2 getheilt; und ebenso wird auch jedes Höhenperpendikel durch eine Linie, welche man durch diesen Punkt parallel mit der entsprechenden Seite zieht, nach demselben Verhältniss getheilt: deshalb kann man folgenden Satz für die Bestimmung des Schwerpunkts eines Dreiecks aufstellen:

Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt in dem Durchschnittspunkt der drei Linien, welche man von den drei Ecken nach den Mitten der Gegenseiten zieht, oder er liegt um den dritten Theil der zugehörigen Höhe von jeder Dreiecksseite entfernt.

Randglosse. Es ist hier, wie bei so vielen andern fundamentalen Betrachtungen in der mathematischen Deduction, durchaus unvermeidlich, den Begriff des Unendlichen (mög' es unendlich gross oder unendlich klein sein) mit hinzuzuziehen. Denn möge man sich noch so sehr dagegen sträuben und möge man noch so viele und scheinbar stichhaltige Beschönigungsgründe hervorsuchen, sobald man ernstlich auf den Grund geht, es findet sich immer in der anscheinend so fest gemauerten Wand eine Spalte, durch welche der vage und für Unkundige theils unsichtbare, theils leicht verführerische Lichtstrahl der Unendlichkeit hereinlugt. So ist es in der Planimetrie erstens bei allen den sogenannten rein geometrischen Beweisen des Parallelen-Theorems und zweitens bei der Bestimmung des Umfangs und Inhalts eines Kreises; ebenso ist es in der Mechanik bei dem Parallelogramm der Kräfte, so wie auch bei gegenwärtiger Untersuchung über den Schwerpunkt des Dreiecks. Denn bei der obigen Deduction denkt man sich nothwendig eine mit einer Dreiecksseite parallel gezogene Linie als eine materielle, da sie Schwere besitzen soll, mithin ist sie eigentlich nicht eine Linie, sondern eine unendlich dünne Schicht.

Man hat nun versucht, diesen Begriff der Unendlichkeit auf diese oder jene Weise zu umgehen, und einer der interessantesten Versuche ist offenbar folgender von *Poinsot* mitgetheilte:

Man denke sich (Fig. XIX.) das Dreieck *ABC*, dessen Höhe *h* und dessen Flächeninhalt *4a* sein mag; ferner bezeichne man durch *x* die unbekannte Entfernung des Schwerpunkts des ganzen Dreiecks von der Grundlinie *AB*. Theilt man nun das Dreieck durch die Linien *DE* und *DF*, welche die Mitten *D*, *E*, *F* der drei Seiten verbinden, in die beiden unter einander congruenten und dem ganzen ähnlichen Dreiecke *ADE* und *DBF* und in das Parallelogramm *DECF*, dann liegt der Schwerpunkt in jedem der beiden kleinern Dreiecke um dasselbe, bis jetzt noch unbekannte, Stück *x'* von der Grundlinie entfernt, der Schwerpunkt des Parallelogramms *DECF*, der nach S. 81 im Durch-

schnittpunkt seiner Diagonalen liegt, ist um $\frac{h}{2}$ von AB entfernt. Weil die Fläche des ganzen Dreiecks $= 4a$ ist, so wird die Fläche jedes der beiden kleinen Dreiecke $= a$ und das Parallelogramm $= 2a$. Man erhält daher nach dem Satz, dass das Moment des ganzen Systems gleich der Summe der Momente der einzelnen Theile sein muss, wenn wir hier die Momente in Bezug auf eine durch AB senkrecht auf dem Papier stehende Ebene, oder, kürzer, in Bezug auf die Linie AB nehmen:

$$4ax = 2a \cdot \frac{h}{2} + ax' + ax'$$

$$x = \frac{1}{4}h + \frac{1}{2}x'$$

Denkt man sich nun eines der kleinern Dreiecke, in derselben Weise wie das ursprüngliche, in zwei abermals kleinere Dreiecke und in ein Parallelogramm zerlegt, und nennt man x'' die Entfernung des Schwerpunkts eines der neu entstandenen Dreiecke von derselben Grundlinie AB , so wird offenbar zwischen x' und x'' dieselbe Relation stattfinden, als zwischen x und x' , wenn man nur $\frac{h}{2}$ in die Stelle von h setzt, so dass man also erhält:

$$x' = \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2}x''$$

Durch fortgesetzte Eintheilung der neu erhaltenen Dreiecke ergibt sich offenbar

$$x'' = \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{4} + \frac{1}{2}x'''$$

$$x''' = \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{8} + \frac{1}{2}x^{IV}$$

und indem man jeden folgenden Werth in die vorhergehende Gleichung einsetzt:

$$x = \frac{1}{4}h + \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{4^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{4^3} + \dots$$

$$= \frac{1}{4}h \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right\}$$

Hierdurch ergibt sich innerhalb der Parenthese eine geometrische Progression mit unendlich vielen Gliedern, deren Fortschreitungs-Exponent $= \frac{1}{4}$, also ein echter Bruch ist. Diese Reihe wird deshalb eine convergirende, d. h. eine

summirebare; ihr Werth ist nach bekanntem Gesetz $= \frac{4}{3}$. Es findet sich also x , d. h. die Entfernung des Schwerpunkts des ursprünglich gegebenen Dreiecks von der Grundlinie AB gleich $\frac{h}{3}$ oder gleich dem dritten Theil der entsprechenden Höhe des Dreiecks. Da sich in Bezug auf jede der drei Seiten des Dreiecks das ähnliche Resultat ergeben muss, so folgt, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks von jeder Seite um den dritten Theil der entsprechenden Höhe von dieser Seite entfernt sein muss; woraus dann ferner durch einfache geometrische Anschauung folgt, dass er der Durchschnittspunkt der drei Linien sein muss, die man von den Spitzen des Dreiecks nach den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten zieht.

Aufg. 3. Es soll der Schwerpunkt der gleichmässig beschwerten Fläche eines Parallel-Trapezes gefunden werden.

Aufl. Es ist diese Aufgabe offenbar ein specieller Fall der vorhergehenden Aufgabe, indem (Fig. XX.) das Parallel-Trapez $ABCD$ der Unterschied der Dreiecke ABE und DCE ist, und es wird also das Moment des ganzen Dreiecks ABE in Bezug auf irgend eine Ebene, oder, da es sich hier wieder nur um eine ebene Figur handelt, in Bezug auf irgend eine Linie, z. B. in Bezug auf AB gleich sein müssen der Summe der Momente des obern Dreiecks DCE und des Parallel-Trapezes $ABCD$ in Bezug auf dieselbe Linie AB .

Nennen wir nun die Grundlinie $AB=G$, die parallele Seite $DC=g$, die Höhe des ganzen Dreiecks $ABE,=H$, die Höhe des obern Dreiecks $DCE,=h$, die Entfernung des gesuchten Schwerpunkts des Parallel-Trapezes von der Grundlinie $AB,=x$, so werden sich die Flächeninhalte der beiden Dreiecke ABE und DCE , da sich dieselben als Flächen ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate gleichnamiger Seiten verhalten müssen, durch $G^2 \cdot a$ und $g^2 \cdot a$, also der Flächeninhalt des Parallel-Trapezes durch $(G^2 - g^2) \cdot a$ ausdrücken lassen, worin a irgend eine beliebige Flächeneinheit bedeutet.

Der erwähnte Satz von den Momenten gibt nun natürlich, mit Bezug auf die vorige Aufgabe, folgende Bedingung:

$$G^2 \cdot a \cdot \frac{4}{3} H = g^2 \cdot a \cdot (H - h + \frac{4}{3} h) + (G^2 - g^2) \cdot a \cdot x$$

$$\text{oder: } 3(G^2 - g^2)x = H \cdot G^2 - 3Hg^2 + 2hg^2$$

$$\text{oder, da } G:g = H:h, \text{ also } H = \frac{G \cdot h}{g} \text{ ist:}$$

$$\begin{aligned} 3(G^2 - g^2)x &= \left(G^2 - 3G \cdot g^2 + 2g^2 \right) \cdot \frac{h}{g} \\ &= (G - g)^2 \cdot (G + 2g) \cdot \frac{h}{g} \end{aligned}$$

Nimmt man zweitens die Momente aller hier zur Sprache kommenden Flächen in Bezug auf die Linie DC und nennt dabei die Entfernung des Schwerpunkts des Parallel-Trapezes von dieser Linie $= y$, so hat man folgende Bedingung:

$$-G^2 \cdot a \cdot (H - h - \frac{1}{3}H) = -(G^2 - g^2) \cdot a \cdot y + g^2 \cdot a \cdot \frac{1}{3}h$$

$$\text{oder: } 3(G^2 - g^2)y = 2HG^2 - 3hG^2 + hg^2$$

oder wegen derselben Proportion $G:g = H:h$, wie vorhin:

$$\begin{aligned} 3(G^2 - g^2)y &= \left(2G^3 - 3G^2g + g^3 \right) \cdot \frac{h}{g} \\ &= (G - g)^2 \cdot (g + 2G) \cdot \frac{h}{g} \end{aligned}$$

Indem man diese beiden erhaltenen Resultate in eine Proportion zusammenstellt, ergibt sich folgende merkwürdige Relation zwischen den Abständen des Schwerpunkts eines Parallel-Trapezes von seinen beiden parallelen Seiten: 4

$$x:y = (G + 2g):g + 2G$$

$$= (g + \frac{1}{2}G):(G + \frac{1}{2}g)$$

Aus dieser Proportion ergibt sich eine ganz vorzüglich elegante Construction des Schwerpunkts eines Parallel-Trapezes. Denn wenn man einer Seits beachtet, dass das Trapez $ABCD$ der Unterschied der beiden Dreiecke ABE und DCE ist, und andrer Seits, dass die Schwerpunkte dieser beiden Dreiecke auf derselben Linie EM , d. h. auf derjenigen Linie, welche die Mitten der beiden Parallelen AB und DC mit der Spitze E verbindet, liegen müssen, und demzufolge auch der Schwerpunkt des Trapezes auf MN liegen muss, so wird es nur darauf ankommen, diese letztere Linie nach dem gefundenen Verhältniss der senkrechten Entfernungen des gesuchten Schwerpunkts zu theilen. Dieses wird aber offenbar dadurch geschehn, dass man an die obere Parallele das Stück $DK = G$

ansetzt, wodurch $NK = G + \frac{1}{2}g$ wird, und an die untere Parallele nach der entgegengesetzten Seite hin das Stück $BL = g$ anträgt, wodurch $ML = g + \frac{1}{2}G$ wird; darauf K mit L verbindet: alsdann wird der Durchschnittpunkt P dieser Linie KL mit der Verbindungslinie der Mitten beider Parallelen der Schwerpunkt des Trapezes sein.

Aufg. 4. Es soll der Schwerpunkt des gleichmässig beschwerten körperlichen Inhalts einer dreiseitigen Pyramide gefunden werden.

Aufl. Die Bestimmung des Schwerpunkts bei der dreiseitigen Pyramide ist ganz ähnlich wie beim Dreieck. Man legt hier ebene Schnitte mit der Grundfläche der Pyramide, dann wird jeder derselben ein Dreieck, dessen Schwerpunkt nach Aufg. 2. bekannt ist. Da alle diese Dreiecke ähnliche und ähnlich liegende sind, so werden alle ihre Schwerpunkte in einer geraden Linie und zwar in derjenigen Linie liegen, welche man von der gegenüberliegenden Ecke nach dem Schwerpunkt der Grundfläche zieht. Da nun aber dasselbe in Bezug auf jede Seitenfläche der Pyramide und ihre gegenüberliegende Ecke stattfinden muss, so wird der Schwerpunkt der ganzen Pyramide in dem gemeinsamen Durchschnittpunkt der vier Linien liegen, welche man von den Ecken nach den Schwerpunkten der gegenüberliegenden Seitenflächen zieht.

Diese vier Linien theilen sich aber aus bekannten geometrischen Gründen nach dem Verhältniss von 1:3, und da jedes Mal die Ebene, welche man durch diesen Punkt parallel mit einer Seitenfläche legt, auch das zugehörige Höhenperpendikel der Pyramide nach demselben Verhältniss theilen muss, so wird man den vorigen Satz auch so aussprechen können: Der Schwerpunkt der Pyramide ist von jeder Seitenfläche um ein Viertel der zugehörigen Höhe entfernt.

Anm. Man wird auch hier, ganz ähnlich wie beim Dreieck, eine solche Ableitung dieses Satzes erhalten, wobei der unvermeidliche Begriff des Unendlichen allein in der Summation einer unendlichen convergirenden geometrischen Progression liegt. — Auch dieser Beweis möge hier seine Stelle finden.

Zu diesem Ende müssen wir aber zunächst einen Hilfssatz ableiten, durch welchen die Entfernung des Schwerpunkts eines dreiseitigen Prismas

von jeder seiner Seitenflächen bestimmt wird. Es sei (Fig. XXI.) $ABCabc$ ein dreiseitiges Prisma. Sind nun hier F, E, D, f, e, d die Mitten der beziehlichen Kanten, so lege man durch $FEfe$ und durch $DEde$ schneidende Ebenen, so wird dadurch das gegebene Prisma in zwei kleinere unter sich congruente und ähnlich gegen die Seitenfläche $ABab$ liegende Prismata $BEDbed$, $EAFfeaf$ und in ein Parallelogramm $DEFCdefc$ getheilt. Bestimmt man nun die Momente der Schwerpunkte dieser drei Theile in Bezug auf die Ebene $ABab$, so muss deren Summe gleich sein dem Moment des ganzen Prismas in Bezug auf dieselbe Ebene.

Wenn man nun für die gegenwärtige Untersuchung h die senkrechte Entfernung der gegenüberliegenden Kante Cc von der Seitenfläche $ABab$ nennt, so wird die Entfernung der entsprechenden Kante der kleineren Prismata von derselben Seitenfläche $= \frac{1}{2}h$ sein. Nennt man nun die Entfernung des Schwerpunkts des ganzen Prismas von dieser ersten Seitenfläche $= x$, und die jedes der kleinern Prismen $= x'$, so wird, wenn man beachtet, dass der Schwerpunkt eines Parallelepipedums im Durchschnittspunkt seiner Diagonalen liegt, und wenn man dabei den kubischen Inhalt des ganzen Prismas $= 4a$ setzt, sich folgende Gleichung zwischen den Momenten ergeben:

$$4ax = ax' + ax' + 2a \cdot \frac{h}{2}$$

also: $x = \frac{1}{4}h + \frac{1}{2}x'$
Indem man nun weiter jedes der kleinern Prismata in zwei neue Prismen und in ein Parallelepipedum zerlegt, die Entfernung des Schwerpunkts jedes der neu construirten Prismen von derselben Fläche durch x'' bezeichnet, und indem man in dieser Zerfällung und Bezeichnung fortfährt, so erhält man offenbar diese auf einander folgende Bedingungsgleichungen:

$$x' = \frac{1}{8}h + \frac{1}{2}x''$$

$$x'' = \frac{1}{16}h + \frac{1}{2}x'''$$

und demzufolge durch allmäliges Einsetzen:

$$x = \frac{1}{4}h + \frac{1}{16}h + \frac{1}{64}h + \dots$$

oder durch Summation dieser unendlichen geometrischen Progression:

$$x = \frac{1}{3}h.$$

Dieses heisst also, dass der Schwerpunkt eines dreiseitigen Prismas von

jeder Seite um den dritten Theil des senkrechten Abstandes der gegenüberliegenden Kante von ihr absteht; oder, wenn man die geometrische Anschauung dabei zu Hilfe nimmt, dass er auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte G und g der beiden dreieckigen Endflächen liegt. — Dass dieser Schwerpunkt ausserdem beiläufig (was für die augenblickliche Untersuchung von keiner Wesentlichkeit ist) in der Mitte dieser Linie liegt, folgt unmittelbar aus dem oben ausgesprochenen Satz, dass der Schwerpunkt eines Körpers nothwendig in einer Ebene liegen müsse, welche denselben in zwei gleiche und symmetrische Hälften theilt, wie es hier bei jeder durch den genannten Punkt gelegten Ebene der Fall ist.

Gehen wir nun weiter und denken uns (Fig. XXII.) eine dreiseitige Pyramide mit der Grundfläche BCD und der Spitze A und legen wir durch L , welches die Mitte der einen Kante AC ist, einen Schnitt LEF parallel mit der Seitenfläche ABD und einen zweiten Schnitt LKM parallel mit der Grundfläche BCD , und denken wir uns endlich durch H , die Mitte von BD , die Linien HK und HE gezogen und die Ebene $HELK$ vollendet, so haben wir dadurch die ursprüngliche Pyramide, deren kubischer Inhalt $= 8a$, deren Grundfläche BCD und das darauf von A aus gefällte Höhenperpendikel $= h$ sein mag, in folgende Theile zerfällt: 1) eine Pyramide mit der Grundfläche FCE und der Spitze L , deren Grundfläche der vierte Theil von BCD , deren Höhe $= \frac{1}{2}h$ und deren kubischer Inhalt $= a$ ist; 2) eine congruente Pyramide mit der Grundfläche KLM und der Spitze A , deren Grundfläche wieder der vierte Theil von BCD , deren Höhe $= \frac{1}{2}h$ und deren kubischer Inhalt $= a$ ist; 3) ein dreiseitiges Prisma, dessen eine Seitenfläche $BFEH$ gleich der Hälfte der allgemeinen Grundfläche BCD , dessen gegenüberliegende Kante KL von dieser Grundfläche um $\frac{h}{2}$ absteht, und dessen kubischer Inhalt also $= 3a$ ist; 4) ein dreiseitiges Prisma, dessen eine dreiseitige Endfläche HED der vierte Theil der allgemeinen Grundfläche BCD , dessen andre Endfläche KLM von der ersten um $\frac{h}{2}$ absteht und dessen kubischer Inhalt also $= 3a$ ist.

Nennt man nun x die Entfernung des Schwerpunkts der ganzen Pyramide von der Grundfläche BCD , ferner x' die Entfernung der Schwerpunkte der beiden kleinern, unter einander congruenten Pyramiden von

ihren respectiven Grundflächen und setzt alsdann das Moment der ganzen Pyramide in Bezug auf die Ebene BCD gleich der Summe der Momente ihrer einzelnen Theile in Bezug auf dieselbe Ebene, so erhält man folgende Bedingungsgleichung:

$$8ax = ax' + a \left(x' + \frac{h}{2} \right) + 3a \cdot \frac{h}{6} + 3a \cdot \frac{h}{4}$$

oder: $x = \frac{7}{12}h + \frac{x'}{4}$.

Denkt man sich nun weiter jede der kleinern Pyramiden ebenso zerlegt und in Bezug auf deren Theile dasselbe Raisonement angestellt, und ebenso weiter fortgefahren, so erhält man analog:

$$x' = \frac{7}{12} \cdot \frac{h}{2} + \frac{x''}{4}$$

$$x'' = \frac{7}{12} \cdot \frac{h}{4} + \frac{x'''}{4}$$

u. s. w. f.

Durch allmäliges Ineinandersetzen findet man:

$$x = \frac{7}{12}h \left\{ 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \dots \right\}$$

$$x = \frac{1}{4}h.$$

Dies ist ja aber das oben gefundene Gesetz.

Dass bei jeder mehr als dreiseitigen Pyramide dasselbe Gesetz gelten muss, dass nämlich der Schwerpunkt um den vierten Theil der Höhe von der gemeinsamen Grundfläche entfernt sein muss, ergibt sich wohl ohne weitläufige Auseinandersetzung von selbst, wenn man sich zuerst die vielseitige Pyramide in lauter dreiseitige zerlegt denkt und dabei beachtet, dass die Schwerpunkte aller einzelnen Theilpyramiden in einer und derselben Ebene, die um den vierten Theil der Höhe von der gemeinsamen Grundfläche entfernt ist, liegen müssen. Und ebenso schliesst man natürlich weiter, wenn man die Anzahl der Seiten der Pyramide bis ins Unendliche wachsen lässt, wenn man also die Pyramide in den Kegel übergehn lässt, dass auch bei diesem der Schwerpunkt um den vierten Theil der Höhe von der Grundfläche entfernt sein müsse.

Aufg. 5. Es soll der Schwerpunkt einer, parallel mit der Grundfläche abgestumpften Pyramide bestimmt werden.

Aufl. Denkt man sich hier die abgestumpfte Pyramide zu einer

vollständigen durch Fortsetzung ihrer Seitenflächen ausgebildet, so ergibt sich ganz analog, wie bei Aufg. 3. bei der Vervollständigung eines Parallel-Trapezes zum Dreieck, dass der Schwerpunkt des Pyramiden-Stumpfes auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte beider parallelen Endflächen liegen müsse. Um diesen Punkt vollständig zu fixiren, darf man daher nur das Verhältniss seines Abstandes (x) von der untern, grössern Endfläche zu dem Abstand (y) von der obern Endfläche kennen.

Da die hier erforderliche Entwicklung vollkommen analog mit der am angezogenen Ort für die Ebene gegebene ist, so möge hier nur das Resultat stehn. Es wird, wenn man G und g die respective grössere und kleinere Endfläche nennt:

$$x:y = \left\{ G + 2\sqrt{G \cdot g} + 3g \right\} : \left\{ g + 2\sqrt{G \cdot g} + 3G \right\}.$$

§. 13.

Um nun von diesen Specialitäten sogleich zu der vollkommen allgemeinsten Bestimmung des Schwerpunkts irgend welchen Systems überzugehen, bemerken wir zunächst, dass all-überall derselbe, schon früher angeführte Principial-Satz gilt, dass das Moment des, in seinem Schwerpunkt vereint gedachten Gewichts eines ganzen Systems in Bezug auf irgend welche Ebene gleich ist der Summe der Momente der einzelnen Theile in Bezug auf dieselbe Ebene.

Bei dieser allgemeinsten Bestimmung des Schwerpunkts von Curven, Oberflächen und Körpern wird es am einfachsten und deutlichsten, wenn man die *Leibnitzische* Vorstellung des Unendlich-Kleinen zu Hilfe nimmt. Man könnte allerdings Alles vermittelst der Exhaustionsmethode nachweisen, aber dieser Weg ist wahrlich nicht der kürzeste, und an Deutlichkeit hat man auch gewiss keinen Gewinn.

Wir bezeichnen das Element einer Curve (natürlich im Allgemeinen von doppelter Krümmung) durch:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

das Element einer Oberfläche durch:

$$du = \sqrt{dx^2 \cdot dy^2 + dx^2 \cdot dz^2 + dy^2 \cdot dz^2},$$

und das Element eines Körpers oder Volumens durch:

$$dv = dx \cdot dy \cdot dz.$$

Die Integrale hiervon, zwischen bestimmten Grenzen genommen, wie es die jedesmalige specielle Aufgabe verlangt, sollen durch die entsprechenden grossen Buchstaben S , U , V bezeichnet werden.

Indem man sich nun in jedem der drei Fälle das Element, sei es des Bogens, oder der Fläche, oder des Körpers, von unendlich kleiner Ausdehnung denkt, so werden die Coordinaten seines Schwerpunkts mit seinen eigenen Coordinaten zusammenfallen, so dass die Momente der Schwerpunkte dieser Elemente in Bezug auf die drei Coordinaten-Ebenen respective werden:

$$x.ds, y.ds, z.ds; x.du, y.du, z.du; x.dv, y.dv, z.dv.$$

Die Summe dieser Momente der einzelnen Elemente, welche offenbar die beziehlichen Integrale (zwischen den gehörigen Grenzen) werden, sind dann gleich zu setzen den Coordinaten des Schwerpunkts des ganzen Bogens, oder der Fläche, oder des Körpers, multiplicirt respective mit S oder U oder V .

Hierdurch erhält man folgende drei Systeme von Formeln für die allgemeinste Bestimmung des Schwerpunkts, dessen Coordinaten ξ , η , ζ heissen mögen:

Schwerpunkt eines Bogens:

$$S = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

$$S.\xi = \int x.\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

$$S.\eta = \int y.\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

$$S.\zeta = \int z.\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Schwerpunkt einer Oberfläche:

$$U = \iint \sqrt{dx^2.dy^2 + dx^2.dz^2 + dy^2.dz^2},$$

$$U.\xi = \iint x.\sqrt{dx^2.dy^2 + dx^2.dz^2 + dy^2.dz^2},$$

$$U.\eta = \iint y.\sqrt{dx^2.dy^2 + dx^2.dz^2 + dy^2.dz^2},$$

$$U.\zeta = \iiint z \cdot \sqrt{dx^2 \cdot dy^2 + dx^2 \cdot dz^2 + dy^2 \cdot dz^2}.$$

Schwerpunkt eines Körpers:

$$V = \iiint dx \cdot dy \cdot dz,$$

$$V.\xi = \iiint x \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

$$V.\eta = \iiint y \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

$$V.\zeta = \iiint z \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

§. 14.

Wenn auch im vorigen §. die allgemeine Theorie der Schwerpunkts-Bestimmung angegeben ist, so finden sich doch so viele Specialitäten und damit verknüpfte Eigenthümlichkeiten, dass man dieselben nicht ausser Acht lassen darf. Indem aber alle diese Einzelheiten nur Ausflüsse aus dem allgemeinen Grundprincip sind, so dürfen wir sie nicht anders, als unter der Form gesonderter Aufgaben hier auführen:

Aufg. 1. Es soll der Schwerpunkt einer durch Raum-Coordinaten gegebenen geraden Linie bestimmt werden.

Aufl. Die gerade Line ist, als Linie im Raum, durch folgende beide Gleichungen gegeben:

$$y = \alpha x + \alpha'$$

$$z = \beta x + \beta'.$$

Sie soll begrenzt sein durch die Coordinaten, welche zu $x = m$ und $x = m'$ gehören. Demgemäss wird die Länge dieser begrenzten Linie:

$$S = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$= \int_m^{m'} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

$$= \int_m^{m'} \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2} \cdot dx$$

$$= (m' - m) \cdot \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}.$$

Zur Bestimmung der Coordinaten des Schwerpunkts erhält man:

$$\begin{aligned} S.\xi &= \int x \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= \int_m^{m'} x \cdot \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2} \cdot dx \\ &= \frac{m'^2 - m^2}{2} \cdot \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S.\eta &= \int y \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= \int_m^{m'} (\alpha x + \alpha') \cdot \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2} \cdot dx \\ &= \left\{ \left(\frac{m'^2 - m^2}{2} \right) \alpha + (m' - m) \alpha' \right\} \cdot \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S.\zeta &= \int z \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= \int_m^{m'} (\beta x + \beta') \cdot \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2} \cdot dx \\ &= \left\{ \left(\frac{m'^2 - m^2}{2} \right) \beta + (m' - m) \beta' \right\} \cdot \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

mithin:

$$\xi = \frac{m' + m}{2}$$

$$\eta = \frac{m' + m}{2} \cdot \alpha + \alpha'$$

$$\zeta = \frac{m' + m}{2} \cdot \beta + \beta'$$

Diese Grössen sind aber nach einfacher analytisch-geometrischer Anschauung die Coordinaten des Mittelpunkts der geraden Linie, welcher sich hier natürlich ohne weitere Rechnung, durch einfaches Raisonnement, als der Schwerpunkt der geraden Linie ergeben hätte.

Aufg. 2. Es soll der Schwerpunkt eines Kreisbogens bestimmt werden.

Aufl. Wenn man den Mittelpunkt des Kreises (mit dem Radius r) zum Anfangspunkt der Coordinaten, den vom Mittelpunkt nach der Mitte

des Bogens gezogenen Radius zur X-Axe annimmt, so wird die Gleichung des in Rede stehenden Kreisbogens: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, während die z-Coordinate offenbar gleich Null wird, da es sich im Augenblick nur um eine ebene Curve handelt. Nennen wir die Länge des gegenwärtigen Kreisbogens = S , so wie die zugehörige Chorde = c , so findet man:

$$S = \int \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy,$$

$$S \cdot \xi = \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy,$$

$$S \cdot \eta = \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy.$$

Diese Gleichungen geben:

$$S = \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}\right)^2} \cdot dy,$$

$$= 2r \cdot \arcsin \left(\sin = \frac{\frac{1}{2}c}{r} \right),$$

$$S \cdot \xi = r \cdot c,$$

$$S \cdot \eta = 0.$$

Die vorletzte Gleichung spricht also folgende Bestimmung für den Schwerpunkt eines durchgängig gleichmässig belasteten Kreisbogens aus:

Der Schwerpunkt eines Kreisbogens liegt auf demjenigen Radius, der nach der Mitte des Bogens gezogen wird und zwar in solcher Entfernung vom Mittelpunkt des zugehörigen Kreises, dass sich dieselbe zum zugehörigen Radius verhält, wie die Sehne zur Länge des Bogens.

Aufg. 3. Es soll der Schwerpunkt eines Cycloiden-Bogens bestimmt werden.

Aufl. Wenn man den Scheitel der Cycloide zum Anfangspunkt der Coordinaten wählt, die in diesem Punkt gezogene Tangente zur X-Axe und die darauf senkrechte Linie, nach jener Seite hin, wo der bewegliche Kreis (mit dem Radius r) liegt, zur positiven Seite der Y-Axe wählt, so wird die Gleichung der Cycloide:

$$x = r \cdot \arccos \left(\frac{r-y}{r} \right) + \sqrt{2ry - y^2}$$

oder:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2r-y}{y}}$$

Wenn man die y -Coordinaten der Endpunkte des Bogens durch n und n' bezeichnet, so wird:

$$S = \int_n^{n'} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} \cdot dy$$

$$= \int_n^{n'} \sqrt{\frac{2r}{y}} dy = 2\sqrt{2r} \left\{ \sqrt{y} \right\}_{y=n}^{y=n'}$$

$$= 2\sqrt{2r} \cdot \left\{ \sqrt{n'} - \sqrt{n} \right\}$$

$$S \cdot \xi = \int_n^{n'} x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} \cdot dy$$

$$= \int_n^{n'} \left\{ r \cdot \arccos \left(\frac{r-y}{r} \right) + \sqrt{2ry - y^2} \right\} \cdot \sqrt{\frac{2r}{y}} \cdot dy$$

$$= 2r \sqrt{2r} \cdot \arccos \left(\frac{r-y}{r} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{2r} \cdot (4r + y) \sqrt{2r - y}$$

$$\left\{ \text{zwischen den Grenzen: } \begin{matrix} y=n' \\ y=n \end{matrix} \right\}$$

$$S \cdot \eta = \int_n^{n'} y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} \cdot dy$$

$$= \int_n^{n'} \sqrt{2ry} \cdot dy = \frac{2}{3} y \sqrt{2ry} \Big|_{y=n}^{y=n'} \\ = \frac{2}{3} \sqrt{2r} \cdot \left\{ n'^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}} \right\}$$

Der Ausdruck für $S \cdot \xi$ und somit auch der von ξ allein wird augenscheinlich sehr unelegant, weshalb er gar nicht für die Grenzen n und n' vollständig hingeschrieben ist. Wenn wir dagegen den letzten Ausdruck für $S \cdot \eta$ durch den vorhergehenden für S dividiren, ergibt sich zur Bestimmung der Coordinate η dieser elegante Werth:

$$\eta = \frac{1}{3} \left\{ n' + \sqrt{n' \cdot n} + n \right\}.$$

Wenn man den Cycloiden-Bogen von dem Scheitel an rechnet, so hat man die untere Grenze der Integration, das $n = 0$ zu setzen. Man erhält alsdann:

$$S = 2 \sqrt{2rn'},$$

$$S \cdot \xi = 2r \sqrt{2rn'} \cdot \arccos \left(\frac{r - n'}{r} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{2r} \cdot \sqrt{2r - n'} \cdot (4r + n') - \frac{16}{3} r^2,$$

$$S \eta = \frac{2}{3} n' \sqrt{2rn'},$$

und wenn man die letzte Gleichung durch die erste dividirt: $\eta = \frac{1}{3} n'$.

Wenn der Bogen symmetrisch zu beiden Seiten des Scheitels genommen wird, so liegt sein Schwerpunkt offenbar auf der Y-Axe und zwar um $\frac{1}{3} n'$ vom Scheitel entfernt.

Wenn man die Hälfte der ganzen Cycloide nimmt, so hat man in obigen Ausdrücken $n' = 2r$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$\xi = r \left(\pi - \frac{4}{3} \right),$$

$$\eta = \frac{2}{3} r.$$

Aufg. 4. Wenn man eine Parabel als eine Curve doppelter Krümmung, also als den Durchschnitt eines Kegels mit einer Ebene betrachtet, so soll der Schwerpunkt eines Bogens derselben gesucht werden.

Aufl. Man denke sich einen geraden Kegel, die Axe desselben nehme man zur Z-Axe, die darauf senkrecht stehende, durch den Scheitel des Kegels gelegte Ebene zur xy -Ebene und die Ebene irgend eines, als erstes gewähltes Axendreiecks ABC (Fig. XXIII.) zur xz -Ebene, so dass

die *Y* Axe hierauf senkrecht steht; alsdann wird bekanntlich die Gleichung der Kegeloberfläche

$$x^2 + y^2 = z^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

wenn α den halben Winkel an der Spitze des Axendreiecks bedeutet. Legt man nun eine schneidende Ebene durch den Kegel, welche senkrecht auf der Ebene des Axendreiecks, also auf der xz Ebene steht, von der einen Seitenlinie CB des Axendreiecks, vom Scheitel ab gerechnet, ein Stück $CK=e$ abschneidet und mit der andern Seitenlinie CA parallel geht, so wird deren Gleichung:

$$\frac{x}{2e \sin \alpha} + \frac{z}{2e \cos \alpha} = 1.$$

Da nun bekanntlich durch diesen auf die genannte Weise geführten Schnitt einer Ebene auf der Oberfläche des geraden Kegels die *Apollonische* Parabel erzeugt wird, so sind die Gleichungen derselben, wenn man sie als Curve doppelter Krümmung betrachtet:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha, \\ \frac{x}{2e \sin \alpha} + \frac{z}{2e \cos \alpha} = 1. \end{cases}$$

Wir hatten nun S. 93 die Länge eines Curvenbogens:

$$\begin{aligned} S &= \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx. \end{aligned}$$

Unsre gegenwärtigen Gleichungen geben aber:

$$z = 2e \cdot \cos \alpha - x \cdot \cotg \alpha$$

$$y = 2\sqrt{e \cdot \sin \alpha} \cdot \sqrt{e \cdot \sin \alpha - x}$$

mithin: $\frac{dz}{dx} = -\cotg \alpha$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{e \cdot \sin \alpha}}{\sqrt{e \cdot \sin \alpha - x}}$$

und folglich: $S = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \int \sqrt{\frac{e \cdot \sin \alpha - x + e \cdot \sin^3 \alpha}{e \cdot \sin \alpha - x}} \cdot dx.$

Setzt man hierin für einen Augenblick

$$\frac{e \cdot \sin \alpha - x + e \cdot \sin^3 \alpha}{e \cdot \sin \alpha - x} = v^2$$

so wird: $S = 2e \cdot \sin \alpha^2 \int \frac{v^2 \cdot dv}{(v^2 - 1)^2}$

$$= e \cdot \sin \alpha^2 \cdot \left\{ -\frac{v}{v^2 - 1} + \frac{1}{2} \log. \left(\frac{v - 1}{v + 1} \right) \right\}$$

oder, wenn man für v wieder seinen Werth einsetzt:

$$S = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \sqrt{(e \cdot \sin \alpha - x)^2 + e \cdot \sin \alpha^3 (e \cdot \sin \alpha - x)} + \frac{1}{2} e \cdot \sin \alpha^2 \cdot \log \left\{ \frac{2(e \cdot \sin \alpha - x) + e \cdot \sin \alpha^3 - 2\sqrt{(e \cdot \sin \alpha - x)^2 + e \cdot \sin \alpha^3 (e \cdot \sin \alpha - x)}}{e \sin \alpha^3} \right\}$$

Verlegt man jetzt das Coordinatensystem in der Weise, dass der Anfangspunkt desselben in K und die neue X Axe nach KL fällt, so wird, wenn man die von K nach L hin gezählte x Coordinate durch x' bezeichnet:

$$(e - x') \cdot \sin \alpha = x.$$

Die y Coordinaten, welche senkrecht auf der Ebene des Axendreiecks stehn, werden jetzt offenbar in dem durch LKM senkrecht geführten Schnitt selbst liegen, und wir werden die Gleichung der Schnittcurve in der Schnittebene selbst erhalten, wenn wir in den obigen Werth von y , welcher $= 2\sqrt{e \cdot \sin \alpha} \cdot \sqrt{e \cdot \sin \alpha - x}$ war, den angegebenen Werth von x einsetzen, nämlich:

$$y = 2 \sin \alpha \sqrt{ex'}$$

oder wenn man $2e \sin \alpha^2 = p$ setzt:

$$y = \sqrt{2px'}.$$

Setzt man denselben Werth von x in den vorhin gefundenen Ausdruck des Bogens, so wird dieser:

$$S = -\frac{1}{4} \left\{ 2\sqrt{4x'^2 + 2px'} + p \cdot \log \left(\frac{4x' + p + 2\sqrt{4x'^2 + 2px'}}{p} \right) \right\}$$

welches den Bogen gibt von $x' = 0$, d. h. vom Scheitel der Parabel bis zu einem gewissen Punkt mit der Abscisse $x' = x'$.

Will man nun weiter den Schwerpunkt dieses Bogens bestimmen, so haben wir nach S. 93:

$$S \cdot \xi = \int x \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$S \cdot \eta = \int y \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$S. \zeta = \int z \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Setzt man in das erste Integral die betreffenden Werthe ein, so wird

$$S. \xi = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \int \frac{x \sqrt{e \cdot \sin \alpha - x + e \cdot \sin \alpha^3}}{\sqrt{e \cdot \sin \alpha - x}} \cdot dx$$

oder wenn man wieder dieselbe Substitution als vorhin macht, nämlich

$$\frac{e \cdot \sin \alpha - x + e \cdot \sin \alpha^3}{e \sin \alpha - x} = v^2,$$

$$x = e \cdot \sin \alpha - \frac{e \cdot \sin \alpha^3}{v^2 - 1},$$

$$\text{so wird: } S. \xi = 2e^2 \cdot \sin \alpha^3 \int \frac{v^4 - (1 + \sin \alpha^2) v^2}{(v^2 - 1)^3} \cdot dv$$

$$= \frac{e^2 \cdot \sin \alpha^3 \left\{ (-4 + \sin \alpha^2) v^2 + (4 + \sin \alpha^2) \right\} \cdot v}{4(v^2 - 1)^2}$$

$$+ \frac{1}{8} e^2 \cdot \sin \alpha^3 (4 + \sin \alpha^2) \cdot \log \left(\frac{v - 1}{v + 1} \right)$$

oder wenn man für v wieder seinen Werth durch x einsetzt:

$$S. \xi = - \frac{e \cdot \sin \alpha + x - \frac{1}{2} e \cdot \sin \alpha^3}{2 \sin \alpha} \cdot \sqrt{e \cdot \sin \alpha - x + e \cdot \sin \alpha^3} \cdot \sqrt{e \cdot \sin \alpha - x}$$

$$- \frac{1}{8} e^2 \cdot \sin \alpha^3 (4 + \sin \alpha^2) \cdot \log \left(\frac{\sqrt{e \cdot \sin \alpha - x + e \cdot \sin \alpha^3} + \sqrt{e \cdot \sin \alpha - x}}{\sqrt{e \cdot \sin \alpha - x + e \cdot \sin \alpha^3} - \sqrt{e \cdot \sin \alpha - x}} \right)$$

und setzt man hier wieder, Behufs der Coordinaten-Verlegung, $x = (e - x') \cdot \sin \alpha$ und $2e \cdot \sin \alpha^2 = p$, so wird, wenn man beachtet, dass man auch die X Coordinate des Schwerpunkts in Bezug auf die neuen Coordinaten-Ebenen bestimmen, also $\xi = (e - \xi') \sin \alpha$ setzen muss:

$$S. \xi' = - \frac{1}{3^2} \left\{ 2(4x' + p) \sqrt{4x'^2 + 2px'} - p^2 \cdot \log \left(\frac{4x' + p + 2\sqrt{4x'^2 + 2px'}}{p} \right) \right\}$$

mithin, nach Division durch den vorhin gefundenen Werth von S :

$$\xi' = \frac{1}{8} \cdot \frac{2(4x' + p) \sqrt{4x'^2 + 2px'} - p^2 \cdot \log \left(\frac{4x' + p + 2\sqrt{4x'^2 + 2px'}}{p} \right)}{2\sqrt{4x'^2 + 2px'} + p \cdot \log \left(\frac{4x' + p + 2\sqrt{4x'^2 + 2px'}}{p} \right)}$$

Setzt man ebenso in das zweite zu bestimmende Integral die betreffenden Werthe, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 S \cdot \eta &= \int y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx \\
 &= \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{\sin \alpha}} \cdot \int \sqrt{e \cdot \sin \alpha - x + e \cdot \sin \alpha^3} \cdot dx \\
 &= -\frac{4\sqrt{e}}{3\sqrt{\sin \alpha}} (e \cdot \sin \alpha - x + e \cdot \sin \alpha^3)^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

Hierin hat man nun wieder wegen der Coordinaten-Verlegung $x = (e - x') \cdot \sin \alpha$ zu setzen, dabei aber zu beachten, dass das η , d. h. die y Coordinate des Schwerpunkts, oder dessen Abstand von der xz Ebene unverändert bleibt, wodurch sich ergibt:

$$S \cdot \eta = -\frac{1}{3} (2x' + p) \cdot \sqrt{2px' + p^2},$$

also nach Division durch den Werth von S :

$$\eta = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2x' + p) \sqrt{2px' + p^2}}{2\sqrt{4x'^2 + 2px'} + p \cdot \log \left(\frac{4x' + p + 2\sqrt{4x'^2 + 2px'}}{p} \right)}$$

Setzt man endlich in das dritte Integral die betreffenden Werthe ein, so wird:

$$\begin{aligned}
 S \cdot \zeta &= \int z \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx \\
 &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha^2} \cdot \int (2e \sin \alpha - x) \cdot \frac{\sqrt{e \sin \alpha - x + e \sin \alpha^3}}{\sqrt{e \sin \alpha - x}} \cdot dx
 \end{aligned}$$

oder wenn man wieder für einen Augenblick die obige Hilfsgrösse v einführt:

$$\begin{aligned}
 S \cdot \zeta &= 2e^2 \cdot \sin \alpha^2 \cdot \cos \alpha \cdot \int \frac{v^4 - \cos \alpha^2 \cdot v^2}{(v^2 - 1)^3} \cdot dv \\
 &= \frac{e^2 \cdot \sin \alpha^2 \cos \alpha \cdot \left\{ (4 + \sin \alpha^2) v^2 - (4 - \sin \alpha^2) \right\} v}{4(v^2 - 1)^2} \\
 &\quad + \frac{1}{8} e^2 \sin \alpha^2 \cos \alpha (4 - \sin \alpha^2) \log \left(\frac{v - 1}{v + 1} \right)
 \end{aligned}$$

oder für v wieder rückwärts seinen Werth durch x eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 S \cdot \zeta &= -\cos \alpha \cdot \frac{\left\{ 6e \sin \alpha - 2x + e \sin \alpha^3 \right\}}{4 \sin \alpha^2} \cdot \sqrt{e \sin \alpha - x + e \sin \alpha^3} \cdot \sqrt{e \sin \alpha - x} \\
 &\quad - \frac{1}{8} e^2 \sin \alpha^2 \cos \alpha (4 - \sin \alpha^2) \log \left(\frac{\sqrt{e \sin \alpha - x + e \sin \alpha^3} + \sqrt{e \sin \alpha - x}}{\sqrt{e \sin \alpha - x + e \sin \alpha^3} - \sqrt{e \sin \alpha - x}} \right)
 \end{aligned}$$

Wenn wir aber im Allgemeinen ξ, η, ζ die Coordinaten irgend eines Punkts in Bezug auf das ursprüngliche Coordinatensystem XCZ (Fig. XXIII,) nennen, während ξ', η', ζ' die Coordinaten desselben Punkts in Bezug auf das neue Coordinatensystem heissen mögen, dessen Anfangspunkt in K liegt, dessen X Axe KL und Z Axe hierauf senkrecht ist, während in beiden Fällen die Y Axe senkrecht auf der Ebene des Axendreiecks steht, so werden die gegenseitigen Beziehungen:

$$\xi = (e - \xi') \cdot \sin \alpha + \zeta' \cos \alpha,$$

$$\eta = \eta',$$

$$\zeta = (e + \xi') \cos \alpha - \zeta' \sin \alpha.$$

Indem man nun gegenwärtig unter ζ' die z Coordinate des gesuchten Schwerpunkts der vorgegebenen Curve versteht, so stellt sich, nachdem man sie durchgängig mit S (d. h. Länge des Bogens) multiplicirt hat, zu deren Bestimmung folgende Gleichung heraus:

$$S \cdot \zeta' \cdot \sin \alpha = S \cdot e \cos \alpha + S \xi' \cdot \cos \alpha - S \cdot \zeta$$

Setzt man nun für S und für $S \cdot \xi'$ die früher gefundenen Werthe, so wie für $S \cdot \zeta$ den kurz vorhin gegebenen ein, so ergibt sich

$\zeta' = 0$, was natürlich sich ohne Calcul, durch die simpelste Ueberlegung ergeben haben würde, da der Schwerpunkt einer ebenen Curve offenbar nicht ausserhalb ihrer Ebene liegen kann.

Aufg. 5. Es soll der Schwerpunkt einer Fläche bestimmt werden, die von zwei gegebenen ebenen Curven und von zwei parallelen Coordinaten, z. B. y Coordinaten, begrenzt wird.

Aufl. Da hier zunächst von einer ebenen Fläche die Rede sein soll, so hat man in den auf S. 93 gegebenen allgemeinen Formeln $z = 0$ zu setzen, wodurch sie übergehen in:

$$U = \iint dx \cdot dy$$

$$U \cdot \xi = \iint x \cdot dx \cdot dy$$

$$U \cdot \eta = \iint y \cdot dx \cdot dy$$

Denkt man sich die beiden Curven, zwischen denen die Fläche liegen soll, durch ihre Gleichungen $y = f(x)$ und $y' = \varphi(x)$ gegeben, so wird man diese Doppel-Integrale, wenn man sie zunächst in Bezug auf y integrirt, zwischen den Grenzen y und y' oder $f(x)$ und $\varphi(x)$ zu nehmen haben, wodurch man erhält:

$$U = \int (y - y') \cdot dx$$

$$U \cdot \xi = \int (y - y') x \cdot dx$$

$$U \cdot \eta = \frac{1}{2} \int (y^2 - y'^2) \cdot dx$$

welche man dann noch zwischen zwei gegebenen constanten Grenzen in Bezug auf x zu bestimmen hat.

Aufg. 6. Es soll mit Hilfe der eben angegebenen Formeln der Schwerpunkt eines ebenen Dreiecks bestimmt werden.

Aufl. Es sei (Fig. XXIV.) ABC das gegebene Dreieck, so lege man sich das Coordinatensystem so, dass die eine Spitze C der Anfangspunkt wird, während die gegenüberliegende Seite AB parallel mit der Y Axe geht, dann werden die beiden die Fläche begrenzenden Curven die beiden Geraden CA und CB sein. Nun sei gegeben:

die Linie CA durch die Gleichung $y = f(x) = \alpha x$.

„ „ „ CB „ „ „ $y' = \varphi(x) = \beta x$;

die Höhe des Dreiecks sei $CD = h$. Alsdann werden die in der vorigen allgemeinen Aufgabe gegebenen Formeln diese werden:

$$U = \int_0^h (\alpha - \beta) \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} h^2 (\alpha - \beta),$$

$$U \cdot \xi = \int_0^h (\alpha - \beta) x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} h^3 (\alpha - \beta),$$

$$U \cdot \eta = \frac{1}{2} \int_0^h (\alpha^2 - \beta^2) x^2 \cdot dx = \frac{1}{6} h^3 (\alpha^2 - \beta^2).$$

Hieraus findet man, wenn G der gesuchte Schwerpunkt wäre:

$$\xi = CE = \frac{2}{3}h,$$

$$\eta = EG = \frac{1}{3}(\alpha + \beta) \cdot h.$$

Der erste Werth gibt zunächst den bekannten Satz, dass der Schwerpunkt um den dritten Theil der Höhe von der Seite AB entfernt liegt. Um den zweiten Werth geometrisch zu deuten, so hat man offenbar die Proportion:

$$CE : CD = EG : DF,$$

$$\frac{2}{3}h : h = \frac{1}{3}(\alpha + \beta)h : DF,$$

mithin:

$$DF = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)h.$$

Es ist aber aus den gegebenen Gleichungen der beiden Linien

$$DA = \alpha \cdot h \text{ und } DB = \beta \cdot h,$$

also wird:

$$DF = \frac{1}{2}(DA + DB)$$

d. h. F ist die Mitte zwischen B und A oder es liegt der Schwerpunkt auf derjenigen Linie, die man von C nach der Mitte der gegenüberliegenden Seite zieht.

Aufg. 7. Es soll der Schwerpunkt eines Kreisausschnitts und der eines Kreisabschnitts gefunden werden.

Aufl. Wenn man zunächst den Schwerpunkt des Kreisabschnitts $ABDA$ (Fig. XXV.) bestimmen will, so kann man diese Fläche betrachten als begrenzt durch die beiden Curven DA und DB und durch die beiden Ordinaten AB und UV , wenn der Mittelpunkt des Kreises zum Anfangspunkt der Coordinaten, der nach der Mitte des Bogens gezogene Radius zur X Axe und darauf senkrecht die Y Axe angenommen wird. Nennt man nun den Radius des Kreises $= r$, so wird (s. Aufg. 5.) die Gleichung

$$\text{der obern Curve } DA: y = f(x) = +\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{,, untern ,, } DB: y' = \varphi(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

und folglich:

$$U = 2 \int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx,$$

$$U \cdot \xi = 2 \int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot x \cdot dx,$$

$$U \cdot \eta = 0.$$

Diese Integrale sind offenbar zwischen den Grenzen $x = CF$ und $x = CD$ zu nehmen, d. h. wenn wir die Sehne $AB = c$ nennen von $x = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2}$ bis $x = r$, wodurch man erhält:

$$U = r^2 \cdot \arccos \left(\frac{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2}}{r} \right) - \frac{1}{2}c\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2}$$

$$= r^2 \arcsin \left(\frac{2r}{c} \right) - \frac{1}{2}c\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2}$$

$$u\xi = \frac{1}{12}c^3, \text{ also } \xi = \frac{1}{12} \cdot \frac{c^3}{u}.$$

Behalten wir nun U als Bezeichnung für den Flächeninhalt des Kreisabschnitts bei und nennen U' den Flächeninhalt und ξ' die Schwerpunktscoordinate des Dreiecks ACB , und endlich U'' und X respective den Flächeninhalt und die Schwerpunktscoordinate des Kreisabschnitts $ACBDA$, so hat man zunächst bekanntlich:

$$U' = \frac{1}{2}c\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2},$$

$$U' \cdot \xi' = \frac{1}{3}c(r^2 - \frac{1}{4}c^2).$$

Betrachtet man aber den Kreisabschnitt als die Summe des Dreiecks und des Kreisabschnitts, so wird auch das Moment des Schwerpunkts der erstern Fläche in Bezug auf die Y Axe gleich der Summe der Momente der beiden letztern in Bezug auf dieselbe Axe sein müssen. Hiernach findet man:

$$U'' = r^2 \cdot \arcsin \left(\frac{c}{2r} \right)$$

$$U'' \cdot X = \frac{1}{3}r^2c.$$

$$\text{mithin: } X = \frac{\frac{1}{3}c}{\arcsin \left(\frac{c}{2r} \right)}.$$

Nun ist aber $2r \cdot \arcsin \left(\frac{c}{2r} \right) = \text{arc } ADB$, also: $X = \frac{\frac{2}{3}rc}{\text{arc } ADB}$, wofür

man auch schreiben kann: $X = \frac{\frac{2}{3}r \cdot \frac{2}{3}c}{\frac{2}{3}\text{arc } ADB}$

d. h. wenn man mit einem Radius $CE = \frac{2}{3}CD$ einen concentrischen Kreis beschreibt, wobei der Bogen $GEH = \frac{2}{3}\text{arc } ADB$ und die Sehne $GH = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}c$

wird, so hat man: $X = \frac{CE \cdot GH}{\text{arc } GEH}.$

Vergleicht man dieses aber mit dem in Aufg. 2, S. 96 gefundenen Resultat, so stellt sich heraus, dass der Schwerpunkt des Kreisabschnitts zusammenfällt mit dem Schwerpunkt des Kreisbogens GEH , den man mit einem $\frac{2}{3}$ mal so grossen Radius beschrieben hat.

Dieses letzte Resultat erhält man auch durch eine ganz andre Be-

trachtung und zwar auf einem viel einfachern Wege. — Denkt man sich nämlich den Kreisausschnitt $ACBDA$ durch unendlich nahe liegende Radien in unendlich viele, unendlich kleine Dreiecke wie ACA' getheilt, so wird der Schwerpunkt jedes dieser kleinen Dreiecke, deren Höhe offenbar $=r$ ist, um $\frac{2}{3}r$ von dem gemeinsamen Scheitel C abstehn. Alle diese Schwerpunkte werden daher auf dem Bogen GEH liegen, wenn $CE = \frac{2}{3}r$ ist, oder es werden auf diesem Bogen die Gewichte aller jener Dreiecke und somit das Gewicht des ganzen Kreisausschnitts gleichmässig vertheilt sein. Der Schwerpunkt dieses Bogens GEH wird daher zugleich der Schwerpunkt des Kreisausschnitts $ACBDA$ sein, was das vorige Resultat gibt.

Aufg. 8. Es soll der Schwerpunkt einer von einem Cycloidobogen begrenzten Fläche bestimmt werden.

Aufl. Wir nehmen dieselbe Lage der Coordinatenaxen, wie sie in Aufg. 3. S. 97 angegeben wurde und wie sie in Fig. XXVI. angedeutet ist; dann wird die Gleichung der Curve:

$$x = r \cdot \arccos \left(\frac{r-y}{r} \right) + \sqrt{2ry - y^2}$$

oder ihre Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2r-y}}$$

Denken wir uns nun ein solches Stück der begrenzten Fläche, wie Cpm , so wird die eine begrenzende Curve die Cycloide, die andre die X Axe und daher der Flächeninhalt:

$$U = \int y \cdot dx = \int \sqrt{2ry - y^2} \cdot dy$$

$$U \cdot \xi = \int y \cdot x \cdot dx$$

$$U \cdot \eta = \frac{1}{2} \int y^2 \cdot dx = \frac{1}{2} \int y \sqrt{2ry - y^2} \cdot dy$$

Das erste Integral gibt den Flächeninhalt der Fläche Cpm :

$$\begin{aligned} U &= \int_0^y \sqrt{2ry - y^2} \cdot dy \\ &= \frac{1}{2} (y - r) \sqrt{2ry - y^2} + \frac{1}{2} r^2 \cdot \arccos \left(\frac{r-y}{r} \right) \end{aligned}$$

Es gibt aber auch anderer Seits das Integral $\int_0^y \sqrt{2ry - y^2} \cdot dy$ den Flächeninhalt der Fläche Cnq , d. h. des halben Kreisabschnitts, der von dem ursprünglichen Kreise durch eine in der Entfernung y mit der X-Axe parallel gezogene Linie abgeschnitten wird.

Die Fläche, welche zwischen dem Cycloidenbogen und der Y-Axe liegt, wird natürlich:

$$\begin{aligned} Cmq &= x \cdot y - U \\ &= \frac{1}{2}(y + r) \sqrt{2ry - y^2} + r(y - \frac{1}{2}r) \arccos \left(\frac{r-y}{r} \right). \end{aligned}$$

Wenn man die ganze Hälfte der Cycloide betrachtet, also das Integral zwischen den Grenzen $y=0$ und $y=2r$ nimmt, so erhält man die Fläche

$$\begin{aligned} CEA &= \frac{1}{2} r^2 \pi \text{ und} \\ CAD &= \frac{3}{2} r^2 \pi. \end{aligned}$$

Das dritte Integral, welches zur Bestimmung der y Coordinate des Schwerpunkts der Fläche Cpm dient, wird:

$$\begin{aligned} U \cdot \eta &= \frac{1}{2} \int_0^y y \sqrt{2ry - y^2} \cdot dy \\ &= -\frac{1}{6} (2ry - y^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} r \cdot u \\ &= \frac{1}{12} (y + r) (2y - 3r) \sqrt{2ry - y^2} + \frac{1}{4} r^3 \arccos \left(\frac{r-y}{r} \right). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir für einen Augenblick die zugehörige y Coordinate des Schwerpunkts des zwischen Bogen und Y-Axe liegenden Stücks Cmq durch η' , so haben wir, da das Moment dieses letztern gleich dem Moment des Parallelogramms $Cpmq$ weniger dem Moment des Stücks Cpm sein muss:

$$\begin{aligned} (xy - U) \cdot \eta' &= \frac{1}{2} xy^2 - U \cdot \eta \\ &= \frac{1}{12} (4y^2 + ry + 3r^2) \sqrt{2ry - y^2} + \frac{1}{4} r (2y^2 - r^2) \arccos \left(\frac{r-y}{r} \right). \end{aligned}$$

Wenn man die ganze Hälfte der Cycloide, wobei für $U = CEA$ vorhin der Werth $= \frac{1}{2} r^2 \pi$ und für $xy - U = CAD$ der Werth $\frac{3}{2} r^2 \pi$ gefunden wurde, berücksichtigt, so wird die y Coordinate

$$\begin{aligned} \text{des Schwerpunkts von } CEA &= \frac{1}{2} r \\ \text{,, „ „ } CAD &= \frac{1}{6} r. \end{aligned}$$

Das zweite Integral endlich, welches die x Coordinate des Schwerpunkts der Fläche Cpm gibt, war:

$$U \cdot \xi = \int x \cdot y \cdot dy - \int_0^y x \sqrt{2ry - y^2} \cdot dy.$$

Zur Bestimmung dieses Integrals wird das einfachste Mittel die Einführung des sich von selbst darbietenden Winkels sein, dessen Cosinus $= \frac{r-y}{r}$ ist. Setzt man nämlich $\cos \varphi = \frac{r-y}{r}$, so wird:

$$\begin{aligned} y &= r - r \cdot \cos \varphi \\ x &= r\varphi + r \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

und das zu untersuchende Integral:

$$U \cdot \xi = r^3 \int_0^\varphi (\varphi + \sin \varphi) \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi.$$

Ohne wesentliche Schwierigkeit findet man:

$$\begin{aligned} U \cdot \xi &= \frac{1}{24} r^3 + \frac{1}{4} r^3 \varphi \cdot \left\{ \varphi - \sin 2\varphi \right\} \\ &\quad - \frac{1}{24} r^3 \cdot \left\{ 18 \cos \varphi + 3 \cos 2\varphi - 2 \cos 3\varphi \right\} \end{aligned}$$

oder wenn man für φ wieder rückwärts seinen Werth durch y einsetzt:

$$\begin{aligned} U \cdot \xi &= \frac{1}{4} r^3 \cdot \arccos \left(\cos = \frac{r-y}{r} \right) \cdot \left\{ \arccos \left(\cos = \frac{r-y}{r} \right) - \frac{2(r-y) \sqrt{2ry - y^2}}{r^2} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} r^2 y + \frac{3}{4} ry^2 - \frac{1}{3} y^3 \end{aligned}$$

Bezeichnen wir in Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden die x Coordinate des Schwerpunkts des zwischen dem Curvenbogen und der Y Axe gelegenen Stückes Cmq durch ξ' , so wird dessen Moment gleich dem Unterschiede der Momente des Parallelogramms $Cpmq$ und des Stückes Cpm , also:

$$\begin{aligned} (xy - U) \cdot \xi' &= \frac{1}{2} x^2 y - U \cdot \xi \\ &= \frac{1}{2} r \cdot \arccos \left(\cos = \frac{r-y}{r} \right) \cdot \left\{ r(y - \frac{1}{2} r) \arccos \left(\cos = \frac{r-y}{r} \right) + (y+r) \sqrt{2ry - y^2} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} r^2 y + \frac{1}{4} ry^2 - \frac{1}{6} y^3. \end{aligned}$$

Wenn man die ganze Hälfte der Cycloide beachtet, wobei nach dem Früheren $U = CEA$ den Werth $\frac{1}{2} r^2 \pi$ und $xy - U = CAD$ den Werth $\frac{3}{2} r^2 \pi$ erhalten, so wird die x Coordinate:

des Schwerpunkts von $CEA = \frac{1}{2} r \pi + \frac{8r}{3\pi}$

„ „ „ $CAD = \frac{1}{2} r \pi - \frac{8r}{9\pi}$

Aufg. 9. Es soll der Schwerpunkt einer von dem Cissoïdenbogen begrenzten Fläche bestimmt werden.

Aufl. Die Cissoïde des *Diocles* entsteht bekanntlich dadurch, dass man (Fig. XXVII.) von dem einen Endpunkt A des Durchmessers AB eines Kreises gerade Linien, so wie AK bis zur Tangente BT zieht und auf dieser Linie $KG = AF$ abschneidet; dann ist G ein Punkt der Curve. Nimmt man AB zur X Axe und die in A darauf senkrechte Linie zur Y Axe, so wird $AL = x$, $GL = y$, $AB = 2r$, $AD = GH = BL = 2r - x$, $FD^2 = AD \cdot DB = x(2r - x)$ und

$$AD : DF = AL : GL$$

d. h. $(2r - x) : \sqrt{x(2r - x)} = x : y$,
wodurch sich als Gleichung der Cissoïde ergibt:

$$y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2r - x}}$$

oder in Differential-Form:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3r - x)\sqrt{x}}{(2r - x)\sqrt{2r - x}}$$

Die Ausdrücke für den Bogen und dessen Schwerpunkts-Coordinaten sollen hier nicht besonders entwickelt werden, da ihre Deduction an und für sich nicht schwierig ist, sondern nur einige nicht sehr compendiöse Rechnung verlangt. Die Resultate sind folgende:

$$S = r \cdot \int_0^x \frac{\sqrt{8r - 3x}}{(2r - x)\sqrt{2r - x}} \cdot dx$$

$$= -4r + 2r \sqrt{\frac{8r - 3x}{2r - x}} - r\sqrt{3} \cdot \log \left\{ \frac{7r - 3x + \sqrt{3}\sqrt{(2r - x)(8r - 3x)}}{7r + 4r\sqrt{3}} \right\},$$

$$S \cdot \xi = r \cdot \int_0^x \frac{x\sqrt{8r - 3x}}{(2r - x)\sqrt{2r - x}} \cdot dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} r^2 \left\{ -2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{(6r - 3x)(8r - 3x)}}{2r} - \log \left(\frac{\sqrt{8r - 3x} - \sqrt{6r - 3x}}{(2 - \sqrt{3})\sqrt{2r}} \right) \right\} + 2r \cdot S,$$

$$S.\eta = r \cdot \int_0^x \frac{x \sqrt{x(8r-3x)}}{(2r-x)^2} \cdot dx$$

$$= \frac{r(4r-x)}{2r-x} \cdot \sqrt{x(8r-3x)} - \frac{16r^2}{\sqrt{3}} \cdot \arcsin \left(\sqrt{\frac{3x}{8r}} \right).$$

Wenn man nun aber die von dem Cissoiden-Bogen begrenzte Fläche ALG und deren Schwerpunkt bestimmen will und wenn man wieder des letztern Coordinaten durch ξ und η bezeichnet, so erhält man folgende Gleichungen:

$$U = \int_0^x y \cdot dx = \int_0^x \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$$

$$U.\xi = \int_0^x xy \cdot dx = \int_0^x \frac{x^3 \cdot dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$$

$$U.\eta = \frac{1}{2} \int_0^x y^3 \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{x^3 \cdot dx}{2r-x}$$

Die einfachen Integrationen, welche durchaus keine Schwierigkeiten darbieten, ergeben:

$$U = -\frac{3r+x}{2} \sqrt{2rx-x^2} + \frac{3}{2} r^2 \cdot \arcsin \left(\cos = \frac{r-x}{r} \right)$$

$$U.\xi = -\left(\frac{5}{2} r^2 + \frac{5}{6} rx + \frac{1}{3} x^2 \right) \sqrt{2rx-x^2} + \frac{5}{2} r^3 \cdot \arcsin \left(\cos = \frac{r-x}{r} \right)$$

$$U.\eta = 4r^3 \cdot \log \left(\frac{2r}{2r-x} \right) - 2r^2 x - \frac{1}{2} rx^2 - \frac{1}{6} x^3.$$

Wenn man $x=r$ setzt, und den für U erhaltenen Werth doppelt nimmt, so erhält man die Fläche $AMN = r^2 \left(\frac{3}{2} \pi - 4 \right)$ und deren Schwerpunkt, der natürlich auf dem Durchmesser AB liegt, ist von A um das Stück $\frac{r}{3} \left(\frac{15\pi - 44}{3\pi - 8} \right)$ entfernt.

Setzt man aber $x=2r$ und nimmt den Werth von u ebenfalls doppelt, so wird die ganze Fläche, welche zwischen der Cissoide und Asymptote liegt $= 3r^2\pi$ und deren Schwerpunkt, der natürlich wieder auf AB liegt, ist von A um das Stück $\frac{5}{3}r$ entfernt.

Aufg. 10. Es soll der Schwerpunkt eines Körpers oder einer Oberfläche gefunden werden, welche durch Umdrehung einer oder mehrer Curven um eine Axe entstanden sind.

Aufl. Obgleich man natürlich die geforderte Bestimmung aus den S. 93 f. gegebenen allgemeinen Formeln erhalten kann, so lässt sich die Sache doch noch einfacher machen. Man denke sich (Fig. XXVIII.) zwei Curven $y = f(x)$ (CD) und $y' = \varphi(x)$ ($C'D'$) und ziehe für dieselben zwei parallele Ordinaten CA und DB , drehe darauf das ganze System um die X Axe, so erzeugt die Fläche $CDC'D'$ offenbar einen Rotations-Körper und der Bogen CD eine Rotations-Oberfläche, deren respective Inhalt und Flächeninhalt bekanntlich sind:

$$V = \pi \int (y^2 - y'^2) \cdot dx$$

$$U = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

In beiden Fällen wird der Schwerpunkt natürlich auf der Rotationsaxe, hier also auf der X Axe liegen; seine beziehliche x Coordinate ergibt sich aus den beiden Gleichungen:

$$V \cdot \xi = \pi \int x (y^2 - y'^2) \cdot dx$$

$$U \cdot \xi = 2\pi \int xy \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Alle diese Integrale sind zwischen den Grenzen $x = 0A$ bis $x = 0B$ zu nehmen.

Aufg. 11. Es soll der Schwerpunkt eines geraden Kegels und seines Mantels bestimmt werden.

Aufl. Wenn wir die Figur der vorigen Aufgabe beibehalten und die Curve $C'D'$ in die X Axe übergehn lassen, die Curve CD aber als eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende gerade Linie OD ansehen, so wird durch Umdrehung des rechtwinkligen Dreiecks ODB um die X Axe der gerade Kegel entstehn.

Wenn man den Winkel DOB , den die gerade Linie OD mit der X Axe macht, $= \alpha$ setzt, so wird die früher genannte Gleichung $y = f(x)$ jetzt die Gleichung der Geraden OD , also $y = x \cdot \tan \alpha$. Die frühere Gleichung $y' = \varphi(x)$ wird jetzt die Gleichung der X Axe, also $y' = 0$. Nennt man nun noch $OB = a$, so sind sämtliche Integrale zwischen $x = 0$ und $x = a$ zu nehmen.

Das Volumen des hier entstandenen Rotations - Körpers, d. h. des geraden Kegels, wird:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a y^2 \cdot dx \\ &= \pi \operatorname{tg} \alpha^2 \int_0^a x^2 \cdot dx \\ &= \frac{\pi}{3} a^3 \cdot \operatorname{tg} \alpha^2; \end{aligned}$$

das Moment seines Schwerpunkts wird:

$$\begin{aligned} V \cdot \xi &= \pi \int_0^a y^2 \cdot x \cdot dx \\ &= \pi \operatorname{tg} \alpha^2 \cdot \int_0^a x^3 \cdot dx \\ &= \frac{\pi}{4} a^4 \operatorname{tg} \alpha^2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich ξ , die Coordinate des Schwerpunkts des geraden Kegels $= \frac{3}{4} a$, d. h. der bekannte Satz, dass der Schwerpunkt des geraden Kegels auf seiner Axe um den vierten Theil derselben von der Grundfläche entfernt liegt.

Die krumme Oberfläche dieses Rotations - Körpers, d. h. der Mantel des geraden Kegels, wird:

$$\begin{aligned} U &= 2\pi \cdot \int_0^a y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \\ &= \frac{2\pi \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha^2} \cdot \int_0^a x \cdot dx \\ &= \frac{\pi a^2 \sin \alpha}{\cos \alpha^2}; \end{aligned}$$

das Moment seines Schwerpunkts wird:

$$\begin{aligned} U \cdot \xi &= 2\pi \cdot \int_0^a xy \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \\ &= \frac{2\pi \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha^2} \cdot \int_0^a x^2 \cdot dx \\ &= \frac{2\pi a^3 \cdot \sin \alpha}{3 \cos \alpha^2}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich ξ , die Coordinate des Schwerpunkts des Mantels eines geraden Kegels $= \frac{2}{3}a$, d. h. der Satz, dass der Schwerpunkt des Mantels eines geraden Kegels auf seiner Axe um den dritten Theil derselben von der Grundfläche entfernt liegt.

Aufg. 12. Es soll der Schwerpunkt eines Kugel-Abschnitts und einer Kugel-Calotte bestimmt werden.

Aufl. Wenn man sich (Fig. XXV.) die Fläche AFD um die X Axe gedreht denkt, so erzeugt diese einen Kugel-Abschnitt und der Bogen AD eine Kugel-Calotte.

Wenn man den Radius des Kreises $= r$ nennt, so wird die in Aufg. 10 angeführte Gleichung $y = f(x)$ hier $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$, während die Gleichung der zweiten Curve, die dort $y' = \varphi(x)$, hier als Gleichung der X Axe $y' = 0$ wird. Nennt man $CF = a$, so sind alle Integrale zwischen den Grenzen $x = a$ bis $x = r$ zu nehmen.

Das Volumen des hier entstandenen Rotationskörpers, also des Kugel-Abschnitts, wird:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^r y^2 \cdot dx \\ &= \pi \int_a^r (r^2 - x^2) \cdot dx \\ &= \frac{\pi}{3} (r - a)^2 (2r + a); \end{aligned}$$

das Moment seines Schwerpunkts wird:

$$\begin{aligned} V \cdot \xi &= \pi \int_a^r xy^2 \cdot dx \\ &= \pi \int_a^r x(r^2 - x^2) dx \\ &= \frac{\pi}{4} (r^2 - a^2)^2. \end{aligned}$$

Hieraus findet man durch Division den Abstand des Schwerpunkts des Kugel-Abschnitts vom Mittelpunkt der Kugel $= \frac{3}{4} \frac{(r + a)^2}{2r + a}$.

Setzt man $a = 0$, so erhält man den kubischen Inhalt der Halbkugel

$= \frac{2}{3} r^3 \pi$ und die Entfernung ihres Schwerpunkts vom Mittelpunkt
 $= \frac{3}{8} r$.

Die krumme Oberfläche des hier entstandenen Rotationskörpers, also die Calotte, wird, da $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ und $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ ist:

$$\begin{aligned} U &= 2\pi \cdot \int_a^r y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \\ &= 2\pi r \cdot \int_a^r dx \\ &= 2\pi r (r - a); \end{aligned}$$

das Moment ihres Schwerpunkts wird:

$$\begin{aligned} U \cdot \xi &= 2\pi \cdot \int_a^r xy \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \\ &= 2\pi r \cdot \int_a^r x \cdot dx \\ &= \pi r (r^2 - a^2). \end{aligned}$$

Hieraus findet man wieder durch einfache Division die Entfernung des Schwerpunkts der Kugel-Calotte vom Mittelpunkt der Kugel $= \frac{1}{2} (r + a) = a + \frac{1}{2} (r - a)$, d. h. der Schwerpunkt liegt in der Mitte von FD .

Wenn man $a = 0$ setzt, erhält man die Oberfläche der Halbkugel $= 2r^2\pi$ und die Entfernung ihres Schwerpunkts vom Mittelpunkt $= \frac{1}{2} r$.

Aufg. 13. Es soll der Schwerpunkt eines Körpers, so wie auch der seiner Oberfläche bestimmt werden, wenn derselbe durch Umdrehung eines Cycloidens Bogens um eine Axe entstanden ist.

Aufl. Man vergleiche S. 97 und S. 107.

Denken wir uns erstens (Fig. XXVI.) das Stück Cmp um die XA xe gedreht, so wird das Volumen des dadurch entstandenen Körpers:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^x y^2 \cdot dx \\ &= \pi \int_0^y y \sqrt{2ry - y^2} \cdot dy \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \pi (y+r) (2y-3r) \sqrt{2ry-y^2} + \frac{1}{2} \pi r^3 \cdot \arccos \left(\frac{r-y}{r} \right)$$

$$V \cdot \xi = \pi \int_0^x y^2 x \cdot dx.$$

Um dieses Integral zu erhalten, benutzt man am zweckmässigsten die schon früher angezogene Polargleichung der Cycloide, welche war:

$$y = r(1 - \cos \varphi), \quad x = r(\varphi + \sin \varphi).$$

Hierdurch erhält man:

$$\int_0^x y^2 x \cdot dx = r^4 \int_0^\varphi (1 - \cos \varphi) \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi) \cdot d\varphi$$

$$= r^4 \int_0^\varphi (1 - \cos \varphi) \sin^2 \varphi \cdot \varphi \cdot d\varphi + r^4 \int_0^\varphi (1 - \cos \varphi) \sin^3 \varphi \cdot d\varphi.$$

Es ist aber das erstere Integral nach der theilweisen Integration:

$$\int (1 - \cos \varphi) \sin^2 \varphi \cdot \varphi \cdot d\varphi = \varphi \cdot \int (1 - \cos \varphi) \sin^2 \varphi \cdot d\varphi -$$

$$\int \left\{ \int (1 - \cos \varphi) \sin^2 \varphi \cdot d\varphi \right\} \cdot d\varphi$$

und wenn man Alles durch die Cosinusse der Vielfachen von φ ausdrückt, nach einfacher Integration:

$$\int (1 - \cos \varphi) \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{12} \sin 3\varphi$$

und $\int \left\{ (1 - \cos \varphi) \sin^2 \varphi \cdot d\varphi \right\} \cdot d\varphi = \frac{1}{4} \varphi^2 + \frac{1}{4} \cos \varphi + \frac{1}{8} \cos 2\varphi - \frac{1}{36} \cos 3\varphi,$

mithin, wenn man beide Werthe in die vorige Gleichung einsetzt und dabei die Grenzen des Integrals beachtet:

$$\int_0^\varphi (1 - \cos \varphi) \sin^2 \varphi \cdot \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{4} \varphi^2 + \varphi \cdot \left\{ -\frac{1}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{12} \sin 3\varphi \right\}$$

$$- \frac{1}{4} \cos \varphi - \frac{1}{8} \cos 2\varphi + \frac{1}{36} \cos 3\varphi + \frac{2}{12}$$

Das zweite zu bestimmende Integral wird aber, wenn man Alles durch die Sinusse der Vielfachen von φ ausdrückt:

$$\int_0^\varphi (1 - \cos \sin \varphi) \varphi^3 \cdot d\varphi = -\frac{3}{4} \cos \varphi + \frac{1}{8} \cos 2\varphi + \frac{1}{12} \cos 3\varphi - \frac{1}{32} \cos 4\varphi + \frac{2}{288}$$

Wenn man diese beiden Resultate addirt und mit $r^4 \cdot \pi$ multiplicirt, so erhält man:

$$V \cdot \xi = \pi \int_0^x y^2 x \cdot dx = \frac{1}{4} \pi r^4 \varphi^2 + \pi r^4 \varphi \cdot \left\{ -\frac{1}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 2 \varphi + \frac{1}{12} \sin 3 \varphi \right\} \\ + \pi r^4 \cdot \left\{ \frac{265}{88} - \cos \varphi + \frac{1}{9} \cos 3 \varphi - \frac{1}{32} \cos 4 \varphi \right\}$$

Will man dieses durch die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten ausdrücken, so muss man rückwärts $\cos \varphi = \frac{r-y}{r}$ setzen, wodurch man erhält:

$$V \cdot \xi = \pi r^2 \arccos \left(\cos = \frac{r-y}{r} \right) \cdot \left\{ \frac{r^2}{4} \arccos \left(\cos = \frac{r-y}{r} \right) + \frac{1}{6} (y+r) (2y-3r) \sqrt{2ry-y^2} \right\} \\ + \frac{\pi}{36} y (18r^3 + 3r^2 y + 20ry^2 - 9y^3).$$

Denkt man sich die zur ganzen Hälfte der Cycloide gehörige Fläche CAE um CE gedreht, so wird:

$$V = \frac{1}{2} \pi^2 r^3 \\ V \cdot \xi = \frac{1}{4} \pi^3 r^4 + \frac{16}{9} \pi r^4,$$

mithin die X Coordinate des Schwerpunkts dieses Körpers:

$$\xi = r \cdot \left(\frac{1}{2} \pi + \frac{32}{9\pi} \right).$$

Die krumme Oberfläche desselben durch die Umdrehung des Stücks Cmp um die X Axe entstandenen Körpers wird:

$$U = 2\pi \int_0^x y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \cdot dx =$$

$$= 2\pi \int_0^y \sqrt{2ry} \cdot dy$$

$$= \frac{4}{3} \pi y \sqrt{2ry}.$$

$$U \cdot \xi = 2\pi \int_0^x xy \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \cdot dx$$

$$= 2\pi \int_0^y x \sqrt{2ry} \cdot dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4\pi}{3} xy \sqrt{2ry} - \frac{4\pi}{3} \sqrt{2r} \int_0^y y \sqrt{2r-y} \cdot dy \\
 &= \frac{4\pi}{3} xy \sqrt{2ry} + \frac{8\pi}{45} \sqrt{2r} (4r+3y) (2r-y)^{\frac{3}{2}} - \frac{128\pi}{45} r^3
 \end{aligned}$$

oder wenn man für x den Werth aus der Gleichung der Cycloide einsetzt:

$$\begin{aligned}
 U \cdot \xi &= \frac{4}{3} \pi r y \sqrt{2ry} \cdot \arccos \left(\frac{r-y}{r} \right) \\
 &+ \frac{4\pi}{45} (9y^2 + 4ry + 16r^2) \sqrt{2r} \cdot \sqrt{2r-y} - \frac{128\pi}{45} r^3
 \end{aligned}$$

Nimmt man die ganze Hälfte des Cycloidens Bogens, also CA , als sich drehend um die X Axe an, so wird die dadurch entstandene Oberfläche:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{16}{3} \pi r^2 \\
 U \cdot \xi &= \frac{16}{3} \pi^2 r^3 - \frac{128\pi}{45} r^3
 \end{aligned}$$

mithin die X Coordinate des Schwerpunkts dieser Oberfläche:

$$\begin{aligned}
 \xi &= \pi r - \frac{8}{15} r \\
 &= CE - \frac{4}{15} \cdot CD
 \end{aligned}$$

Denken wir uns zweitens das Stück Cmq um die Y Axe gedreht, so wird das Volumen des dadurch entstandenen Rotationskörpers:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^y x^2 \cdot dy \\
 &= \pi x^2 y - 2\pi \int yx \cdot dx
 \end{aligned}$$

Um das letzte Integral zu erhalten, wendet man am einfachsten die vorhin gebrauchten Werthe der Coordinaten mittelst des Winkels φ an, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned}
 \int yx \, dx &= r^3 \int (\varphi + \sin \varphi) \sin^2 \varphi \cdot d\varphi \\
 &= r^3 \int \varphi \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi + r^3 \int \sin^3 \varphi \cdot d\varphi \\
 &= r^3 \varphi \int \sin^2 \varphi \cdot d\varphi - r^3 \int \left\{ \int \sin^2 \varphi \cdot d\varphi \right\} \cdot d\varphi + r^3 \int \sin^3 \varphi \, d\varphi
 \end{aligned}$$

$$= r^3 \cdot \left\{ \frac{1}{4} \varphi^2 - \frac{1}{4} \varphi \sin 2\varphi - \frac{3}{4} \cos \varphi - \frac{1}{8} \cos 2\varphi + \frac{1}{12} \cos 3\varphi \right\}$$

$$= r^3 \cdot \left\{ \frac{1}{4} \varphi^2 - \frac{1}{4} \varphi \sin 2\varphi + \frac{1}{8} - \cos \varphi - \frac{1}{4} \cos \varphi^2 + \frac{1}{3} \cos \varphi^3 \right\}.$$

Wenn man dieses doppelt nimmt und von x^2y , d. h. von $x^2y = \varphi^2(1 - \cos \varphi) + \varphi(2\sin \varphi - \sin 2\varphi) + 1 - \cos \varphi - \cos \varphi^2 + \cos \varphi^3$ abzieht, für φ wieder rückwärts $\arccos \left(\cos = \frac{r-y}{r} \right)$ einsetzt, darauf mit π multiplicirt und das Ganze zwischen den Grenzen 0 und y nimmt, so erhält man:

$$V = \pi r \cdot \arccos \left(\cos = \frac{r-y}{r} \right) \cdot \left\{ r(y - \frac{1}{2}r) \arccos \left(\cos = \frac{r-y}{r} \right) + (y+r)\sqrt{2ry-y^2} \right\}$$

$$- \pi y \left(\frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{2}ry + r^2 \right)$$

Um den Schwerpunkt dieses Rotationskörpers zu bestimmen, der natürlich auf der Y-Axe liegt, hat man:

$$V \cdot \eta = \pi \int_0^y x^2 y \cdot dy$$

$$= \frac{1}{2} \pi x^2 y^2 - \pi \int y^2 x \cdot dx$$

Das Integral $\int y^2 x \cdot dx$ ist bereits auf S. 117 gefunden; indem man hierfür und auch in dem endlichen Gliede für x und y die Werthe einsetzt, erhält man:

$$V \cdot \eta = \frac{\pi r}{2} \cdot \arccos \left(\cos = \frac{r-y}{r} \right) \cdot \left\{ r(y^2 - \frac{1}{2}r^2) \arccos \left(\cos = \frac{r-y}{r} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{(4y^2 + ry + 3r^2)}{3} \sqrt{2ry - y^2} \right\} - \pi y \left(\frac{1}{4}y^3 - \frac{4}{9}ry^2 + \frac{1}{12}r^2y + \frac{1}{2}r^3 \right)$$

Nimmt man die ganze Hälfte der Cycloide, so wird:

$$V = r^3 \pi \cdot \left\{ \frac{3}{2} \pi^2 - \frac{8}{3} \right\}$$

$$V \eta = r^4 \pi \cdot \left\{ \frac{7}{4} \pi^2 - \frac{16}{9} \right\}$$

mithin die y Coordinate des Schwerpunkts dieses Körpers:

$$\eta = \frac{r \cdot (63 \pi^2 - 64)}{6(9 \pi^2 - 16)}.$$

Wenn man endlich die krumme Oberfläche des durch die Umdrehung des Stücks Cmq um die Y Axe entstandenen Körpers bestimmt, so wird

$$U = 2\pi \int_0^y x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy$$

$$= 2\pi \sqrt{2r} \int_0^y \frac{x \cdot dy}{\sqrt{y}},$$

vermittelst der theilweisen Integration:

$$= 4\pi \sqrt{2r} \left\{ x \sqrt{y} + \frac{2}{3} (2r - y)^{\frac{3}{2}} \right\} - \frac{32}{3} \pi r^2,$$

oder:

$$U = 4\pi r \sqrt{2ry} \cdot \arccos \left(\cos = \frac{r-y}{r} \right) + \frac{4}{3} \pi (y + 4r) \sqrt{2r} \sqrt{2r-y} - \frac{32}{3} \pi r^2$$

Zur Bestimmung des Schwerpunkts, der natürlich auf der Y Axe liegt, hat man:

$$U \cdot \eta = 2\pi \int_0^y xy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy$$

$$= 2\pi \sqrt{2r} \int_0^y x \sqrt{y} \cdot dy$$

vermittelst der theilweisen Integration:

$$= \frac{4\pi}{3} xy \sqrt{2ry} - \frac{4\pi}{3} \sqrt{2r} \int_0^y y \sqrt{2r-y} \cdot dy$$

$$= \frac{4\pi}{3} x y \sqrt{2ry} + \frac{8\pi}{45} (4r + 3y) (2r - y) \sqrt{2r} \sqrt{2r-y} - \frac{128}{45} r^3 \pi$$

oder:

$$U \cdot \eta = \frac{4\pi}{3} y \sqrt{2ry} \cdot \arccos \left(\cos = \frac{r-y}{r} \right)$$

$$+ \frac{8\pi}{45} (4r + 3y) (2r - y) \sqrt{2r} \sqrt{2r-y} - \frac{128}{45} r^3 \pi$$

Nimmt man die ganze Hälfte der Cycloide, so wird:

$$U = 8r^2 \pi \cdot \left\{ \pi - \frac{4}{3} \right\}$$

$$U \cdot \eta = \frac{16}{3} r^3 \pi \cdot \left\{ \pi - \frac{8}{15} \right\}$$

mithin die y Coordinate des Schwerpunkts dieser Rotations - Oberfläche:

$$\eta = \frac{2}{3} r \left\{ \frac{\pi - \frac{8}{15}}{\pi - \frac{4}{3}} \right\}.$$

Aufg. 14. Es soll der Schwerpunkt des durch Umdrehung eines Cissoiden-Bogens entstandenen Körpers und dessen Oberfläche bestimmt werden.

Aufl. Wir haben S. 110 als Gleichung der Cissoide in Bezug auf die dort allegirte Figur XXVII. folgende gefunden:

$$y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2r-x}}$$

woraus sich ergab:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3r-x)\sqrt{x}}{(2r-x)\sqrt{2r-x}}$$

Denken wir uns nun erstens den Curvenbogen um die X Axe, also um AB gedreht, so wird der kubische Inhalt des dadurch entstandenen Revolutions - Körpers:

$$V = \pi \int_0^x y^2 \cdot dx$$

$$= \pi \int_0^x \frac{x^3}{2r-x} \cdot dx$$

$$= 8\pi r^3 \log \left(\frac{2r}{2r-x} \right) - \pi \cdot \frac{x}{3} (12r^2 + 3rx + x^2).$$

Zur Bestimmung der x Coordinate seines Schwerpunkts hat man:

$$V \cdot \xi = \pi \int_0^x x \cdot y^2 \cdot dx$$

$$= \pi \int_0^x \frac{x^4}{2r-x} \cdot dx$$

$$= 16\pi r^4 \log \left(\frac{2r}{2r-x} \right) - 2\pi \cdot \frac{rx}{3} (12r^2 + 3rx + x^2) - \frac{1}{4}\pi x^4$$

Wenn man $x=r$ setzt, so erhält man den Körper, der durch die Umdrehung der Fläche AMN um die X Axe entsteht, nämlich:

$$V = 8\pi r^3 \log 2 - \frac{16}{3} \pi r^3 = (0,2118451) \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V \cdot \xi = 16\pi r^4 \log 2 - \frac{131}{12} \pi r^4 = (0,1736902) \cdot \pi \cdot r^4$$

mithin die x Coordinate des Schwerpunkts dieses Körpers:

$$\xi = \frac{2r \cdot (\log 2 - \frac{131}{192})}{\log 2 - \frac{2}{3}} = (0,819892) \cdot r.$$

Die krumme Oberfläche des durch die Umdrehung des Cissoidenbogens um die X Axe entstandenen Körpers wird:

$$\begin{aligned} U &= 2\pi \int_0^x y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \\ &= 2\pi r \int_0^x \frac{x \sqrt{8rx - 3x^2}}{(2r - x)^2} \cdot dx \\ &= \frac{2\pi r (4r - x)}{2r - x} \sqrt{8rx - 3x^2} - \frac{32\pi r^2}{\sqrt{3}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{3x}{8r}} \right). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der x Coordinate ihres Schwerpunkts hat man:

$$\begin{aligned} U \cdot \xi &= 2\pi \int_0^x xy \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \\ &= 2\pi r \int_0^x \frac{x^2 \sqrt{8rx - 3x^2}}{(2r - x)^2} \cdot dx; \end{aligned}$$

wenn man hierin für einen Augenblick $\sqrt{8rx - 3x^2} = x \cdot z$ setzt, so gelangt man nach einer nicht gar zu kurzweiligen Nebenrechnung zu folgendem Resultat:

$$\begin{aligned} U \cdot \xi &= \frac{1}{3} \pi r \frac{\sqrt{8rx - 3x^2} \cdot (64r^2 - 14rx - 3x^2)}{2r - x} \\ &\quad + 8\pi r^3 \log \left\{ \frac{4r - x - \sqrt{8rx - 3x^2}}{2(2r - x)} \right\} - \frac{208}{3\sqrt{3}} \pi r^3 \arcsin \left(\sqrt{\frac{3x}{8r}} \right). \end{aligned}$$

Setzt man hierin $x=r$, so erhält man die krumme Oberfläche des durch Umdrehung der Fläche AMN um die X Axe entstandenen Körpers:

$$\begin{aligned} U &= 2\pi r^2 \left\{ 3\sqrt{5} - \frac{16}{\sqrt{3}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{3}{8}} \right) \right\} \\ U \cdot \xi &= \frac{1}{3} \pi r^3 \left\{ 47\sqrt{5} - \frac{208}{\sqrt{3}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{3}{8}} \right) + 24 \log \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

woraus sich dann auch ξ finden lässt.

Denken wir uns zweitens den Cissoidenbogen um die Asymptote TBT' gedreht, so müssen wir uns den Anfangspunkt der Coordinaten nach B verlegt denken, was wir dadurch erreichen, dass wir $2r - x$ in die Stelle von x setzen. Bei dieser Annahme wird die Gleichung der Cissoide:

$$y = \frac{(2r - x)\sqrt{2r - x}}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(r + x)\sqrt{2r - x}}{x\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{r\sqrt{2r + 3x}}{x\sqrt{x}}$$

Dreht man nun die Fläche $BAMGH$ um BH , so wird das Volumen dieses Rotationskörpers:

$$V = \pi \int_0^y x^2 \cdot dy$$

$$= -\pi \int_{2r}^x (x + r) \sqrt{2rx - x^2} \cdot dx$$

$$= \frac{\pi}{3} (3r^2 - rx - x^2) \sqrt{2rx - x^2} + \pi r^3 \arccos \left(\frac{x - r}{r} \right).$$

Für die Bestimmung des Schwerpunkts dieses Körpers, der natürlich auf der Asymptote, als Drehungsaxe, liegt, hat man:

$$V \cdot \eta = \pi \int_0^y x^2 \cdot y \cdot dy$$

$$= -\pi \int_{2r}^x (r + x) (2r - x)^2 \cdot dx$$

$$= \pi (4r^4 - 4r^3x + rx^3 - \frac{1}{4}x^4).$$

Nimmt man den speciellen Fall $x=r$, also den Körper, der durch Umdrehung der Fläche $BAMP$ entsteht, so findet man:

$$V = \pi r^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi \right)$$

$$V \cdot \eta = \frac{3}{4} \pi r^4$$

mithin: $\eta = \frac{\frac{3}{4}r}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi} = (0,7869) \cdot r$

Wenn man den ganzen von dem einen unendlichen Ast der Curve erzeugten Raum sucht, wobei man $x=0$ zu setzen hat, so wird:

$$V = \pi^2 r^3$$

$$V \cdot \eta = 4\pi r^4$$

also:
$$\eta = \frac{4}{\pi} \cdot r$$

Bestimmen wir ebenso die krumme Oberfläche dieses Körpers, also die durch die Umdrehung des Curvenbogens AMG um die Asymptote TB erzeugte Fläche, so wird:

$$U = 2\pi \int_{y=0}^{y=y} x \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= 2\pi r \int_{2r}^x \frac{\sqrt{2r+3x}}{\sqrt{x}} \cdot dx$$

$$= 2\pi r \cdot \left\{ \sqrt{2rx + 3x^2} - \frac{2r}{\sqrt{3}} \log \left(\frac{\sqrt{2r+3x} - \sqrt{3x}}{(2-\sqrt{3})\sqrt{2r}} \right) - 4r \right\}$$

Für die Bestimmung des Schwerpunkts dieser Fläche hat man:

$$U \cdot \eta = 2\pi \int_{y=0}^{y=y} xy \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= 2\pi r \int_{2r}^x \frac{(2r-x) \sqrt{(2r+3x)(2r-x)}}{x} \cdot dx$$

$$= \pi r \left\{ \frac{1}{3} (14r - 3x) \sqrt{(2r+3x)(2r-x)} \right.$$

$$\left. - \frac{16}{3\sqrt{3}} r^2 \arctan \left(\sqrt{\frac{6r-3x}{2r+3x}} \right) - 8r^2 \log \left(\frac{\sqrt{2r+3x} + \sqrt{2r-x}}{\sqrt{2r+3x} - \sqrt{2r-x}} \right) \right\}$$

In Rücksicht auf die letzten Aufgaben, die sich auf die Umdrehungskörper und Umdrehungs-Oberflächen beziehen, dürften hier folgende beide Bemerkungen an ihrer Stelle sein.

Erste Bemerk. Wenn man den Schwerpunkt eines durch Umdrehung einer Ebene um eine feste Axe (als welche hier z. B. die XAxe angenommen werden mag) entstandenen Körpers bestimmen will, so denkt

man sich denselben durch Ebenen, die parallel mit der yz Ebene gehn und in unendlich kleiner Entfernung von einander liegen, in unendlich dünne cylindrische oder konische Schichten zerlegt. Wenn die erzeugende gedrehte Ebene durch die X Axe und durch eine Curve $y = f(x)$ begrenzt ist, so entsteht bei der Umdrehung ein abgestumpfter Kegel, dessen eine Endfläche ein Kreis mit dem Radius y , die andre Endfläche ein Kreis mit dem Radius $y + dy$, dessen Seitenlinie $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, und dessen Höhe $= dx$ ist. Der kubische Inhalt dieses unendlich kleinen Kegelstumpfs wird

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \{3y^2 + 3y \cdot dy + dy^2\} \cdot dx$$

oder wenn man das unendlich Kleine der höhern Ordnung neben dem der ersten Ordnung wegwirft:

$$= \pi y^2 \cdot dx$$

d. h. gleich dem kubischen Inhalt eines Cylinders, dessen Basis ein Kreis mit dem Radius y und dessen Höhe $= dx$ ist.

Die Entfernung des Schwerpunkts dieses unendlich kleinen Körpers, der natürlich auf der Y Axe selbst liegt, von der yz Ebene ist $x + \frac{1}{2} dx$, mithin sein Moment in Bezug auf die yz Ebene

$$= \pi y^2 \cdot dx \cdot (x + \frac{1}{2} dx)$$

oder indem man wieder nur das unendlich Kleine der ersten Ordnung in der Rechnung behält:

$$= \pi xy^2 \cdot dx$$

so wie wir es schon früher auf S. 112 gehabt haben.

Vollkommen dasselbe Raisonement in Bezug auf die Zerleguug eines Körpers in konische oder cylindrische Elemente, welches hier bei Rotationskörpern angestellt wurde, lässt sich auf alle solche Körper anwenden, welche symmetrisch in Bezug auf eine Axe sind, wie dieses z. B. beim Ellipsoid der Fall ist.

Hat man nämlich ein Ellipsoid mit den drei Halbaxen a, b, c , so dass seine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, so wird jeder in der Entfernung x mit der yz Ebene parallel geführte Schnitt eine Ellipse geben, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

und deren beide Halbaxen:

$$\frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ und } \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

sind. Der Flächeninhalt dieser Ellipse wird:

$$= \pi \cdot \frac{bc}{a^2} (a^2 - x^2),$$

also der kubische Inhalt einer unendlich dünnen Schicht:

$$= \pi \cdot \frac{bc}{a^2} (a^2 - x^2) \cdot dx$$

und deren Moment in Bezug auf die yz Ebene:

$$= \pi \cdot \frac{bc}{a^2} (a^2 - x^2) \cdot x \cdot dx$$

Indem man diese beiden Ausdrücke zwischen den Grenzen $x=n$ bis $x=m$ integrirt, darauf den ersten in den zweiten dividirt, so erhält man die X Coordinate des Schwerpunkts des zwischen den Werthen $x=n$ und $x=m$ liegenden Ellipsoiden - Stumpfs:

$$= \frac{3}{4} (m+n) \cdot \left\{ \frac{2a^2 - m^2 - n^2}{3a^2 - m^2 - mn - n^2} \right\}.$$

Setzt man hierin $m=a$ und $n=0$, so erhält man die Entfernung des Schwerpunkts des halben Ellipsoids von der yz Ebene:

$$= \frac{3}{8} a.$$

Aehnliche Resultate würden sich beim ein- und zweifächrigen Hyperboloid, so wie auch beim elliptischen Paraboloid ergeben.

Zweite Bemerk. Wenn man die Formeln für das Volumen und die krumme Oberfläche eines durch Umdrehung einer ebenen Fläche oder Curve um eine feste Axe entstandenen Körpers mit der Entfernung des Schwerpunkts dieser Fläche oder Curve von derselben Axe vergleicht, so erhält man merkwürdige Beziehungen, die unter dem Namen der *Guldin'schen Regel* bekannt sind.

Wenn man (Fig. XXVIII.) die von zwei ebenen Curven $y = f(x)$ und $y' = \varphi(x)$ begrenzte Fläche $CC' DD' = U$ um die X Axe dreht, so entsteht ein Körper, dessen kubischer Inhalt, wie gewöhnlich, $= V$ heissen mag. Man hat aber in diesem Fall, nach S. 112:

$$V = \pi \int (y^2 - y'^2) \cdot dx$$

und nennt man η die y Coordinate des Schwerpunkts der erzeugenden Fläche, so ist nach S. 104:

$$U \cdot \eta = \frac{1}{2} \int (y^2 - y'^2) \cdot dx$$

mithin durch Elimination des gemeinsamen Integrals:

$$V = 2\pi\eta \cdot U.$$

Diese Relation gilt für den ganzen Revolutionskörper; man erhält aber Analoges auch für einen Theil desselben. Wenn man nämlich zwei Ebenen legt, die sich längs der X Axe schneiden und unter einem Winkel $=\varphi$ gegen einander geneigt sind, so wird dadurch ein Stück, welches W heissen mag, herausgeschnitten, dessen Volumen sich zu dem des ganzen Körpers verhält, wie der Winkel φ zu vier Rechten, so dass man hat:

$$W : V = \varphi : 2\pi,$$

mithin, wenn man für V den vorher gefundenen Werth einsetzt:

$$W = \varphi \cdot \eta \cdot U.$$

Während die erzeugende Fläche sich so weit dreht, dass der Körper W gebildet wird, beschreibt der Schwerpunkt mit dem Radius η einen Kreisbogen, der zu dem Winkel φ gehört und dessen Länge also $=\varphi \cdot \eta$ ist. Daher spricht die gefundene Gleichung folgenden Satz aus:

Ein Theil eines Revolutionskörpers, der durch die Umdrehung einer ebenen Fläche um eine in derselben Ebene liegende Gerade entsteht, ist gleich der erzeugenden Fläche multiplicirt in den Weg, den deren Schwerpunkt bei dieser Drehung zurückgelegt hat.

Denkt man sich den Flächeninhalt der ursprünglichen Fläche $=0$, d. h. fallen die beiden Curven $y=f(x)$ und $y'=\varphi(x)$ in eine einzige zusammen, oder reduciren sie sich auf einen Curvenbogen, so dass also U in S übergeht, so wird der Körper V in eine krumme Oberfläche U übergehn. Nennen wir nun das dem Winkel φ entsprechende Stück dieser Oberfläche $=O$ und die y Coordinate des Schwerpunkts der erzeugenden Curve wieder $=\eta$, so ergibt sich ganz analog:

$$O = \varphi \cdot \eta \cdot S,$$

welche Gleichung folgenden Satz ausspricht:

Ein Theil einer Revolutionsoberfläche, welche durch die Umdrehung einer ebenen Curve um eine in derselben Ebene liegende Gerade entsteht, ist gleich der erzeugenden Curve multiplicirt in den Weg, den ihr Schwerpunkt bei dieser Drehung zurückgelegt hat.

Diese Regel wird nach dem Jesuiten *Paulus Guldinus* aus *St. Gallen* benannt, weil sie zuerst durch dessen Werk: *De centro gravitatis. Viennae 1640, lib. II, cap. VIII, prop. II* den Mathematikern bekannt wurde, obwohl sie sich schon in des *Pappus* gesammelten Schriften am Ende der Vorrede des siebenten Buchs findet.

Aufg. 15. Es soll der Schwerpunkt eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks gefunden werden.

Aufl. Wenn r der Radius der Kugel ist, so wird die Gleichung der Kugeloberfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

woraus man sogleich erhält:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{dx^2 \cdot dy^2 + dx^2 \cdot dz^2 + dy^2 \cdot dz^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \cdot dx \cdot dy \\ &= \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \cdot dx \cdot dy \end{aligned}$$

Hiernach werden die auf S. 93 angegebenen Formeln in folgende übergehn:

$$U = \iint \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \cdot dx \cdot dy$$

$$U \cdot \xi = \iint \frac{r \cdot x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \cdot dx \cdot dy$$

$$U \cdot \eta = \iint \frac{r \cdot y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \cdot dx \cdot dy$$

$$U \cdot \zeta = \iint r \cdot dx \cdot dy$$

und diese Ausdrücke werden den Schwerpunkt eines sphärischen Dreiecks bestimmen, wenn man die Grenzen der Integrationen demgemäss annimmt.

Wir denken uns nun (Fig. XXIX.) ein bei C rechtwinkliges sphärisches Dreieck, in welchem die drei sphärischen Winkel durch A, B, C und die gegenüberliegenden Seiten durch die entsprechenden kleinen Buchstaben a, b, c bezeichnet werden sollen. Der Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten soll im Mittelpunkt der Kugel, in O liegen, der eine Schenkel CB des rechten Winkels des in Rede stehenden Dreiecks in der xz Ebene und der zweite Schenkel desselben Winkels in der xy Ebene. Wenn man sich bei dieser Annahme für CB und CA bestimmte Zahlengrössen a und b denkt, so wird die dritte das Dreieck begrenzende Seite AB , da sie ein Bogen eines grössten Kugelkreises ist, als der Durchschnitt einer durch den Mittelpunkt der Kugel gelegten Ebene mit der Kugeloberfläche angesehen werden. Die Gleichung dieser durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Ebene hat natürlich die Form:

$$z = mx + ny.$$

Um die beiden Coefficienten m und n zu bestimmen, hat man, weil diese Ebene durch den Punkt B gehn muss, die Bedingung:

$$r \sin a = mr \cos a$$

und weil sie durch den Punkt A gehn muss, die Bedingung:

$$0 = mr \cos b + nr \sin b.$$

Indem man hieraus m und n berechnet, erhält man als Gleichung der schneidenden Ebene:

$$z = x \cdot \tan a - y \cdot \tan a \cdot \cotg b,$$

welche mit der Gleichung der Kugeloberfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

zusammengestellt, die Gleichung der Schnittcurve AB gibt.

Indem man aus diesen beiden Gleichungen z eliminirt, erhält man für AB' , d. h. für die Projection der Schnittcurve auf die xy Ebene die Gleichung:

$$r^2 = x^2 + y^2 + \left\{ x \cdot \tan a - y \cdot \tan a \cdot \cotg b \right\}^2,$$

woraus sich ergibt:

$$x = y \cdot \sin a^2 \cdot \cotg b \pm \cos a \cdot \sqrt{r^2 - y^2 - y^2 \cdot \sin a^2 \cdot \cotg b^2}.$$

Für die hier angezogene Figur, wo das sphärische Dreieck kleiner

als ein Quadrat ist, muss für $y=0$, $x=+r \cos a$ werden, weshalb für gegenwärtige Untersuchung in der letzten Gleichung nur das obere Zeichen in Anwendung kommen darf.

Integrirt man nun die obigen Doppel-Integrale zunächst in Bezug auf die Variable x , so findet man:

$$U = r \cdot \int \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{r^2 - y^2}} \right) \cdot dy$$

$$U \cdot \xi = -r \cdot \int \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \cdot dy$$

$$U \cdot \eta = r \cdot \int y \cdot \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{r^2 - y^2}} \right) \cdot dy$$

$$U \cdot \zeta = r \cdot \int x \cdot dy$$

Die hier geschriebenen Functionen unter den Integralzeichen sind aber noch zwischen den gehörigen Grenzen zu nehmen, d. h. zwischen allen Werthen von x , die zu der Projectionscurve AB' und zwischen allen Werthen, die zu dem begrenzenden Bogen AC gehören, oder mit andern Worten zwischen den Grenzen

$$x = y \cdot \sin a^2 \cdot \cotg b + \cos a \sqrt{r^2 - y^2} - y^2 \cdot \sin a^2 \cdot \cotg b^2$$

und $x = \sqrt{r^2 - y^2}$.

Setzt man aber hierin, um die Rechnung etwas concinner zu machen:

$$\frac{y \cdot \sin a \cdot \cotg b}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \sin u$$

oder da im sphärischen rechtwinkligen Dreieck, bei der oben angegebenen Bezeichnung, $\sin a \cdot \cotg b = \cotg B$ ist:

woraus sich $\sin u = \frac{y \cdot \cotg B}{\sqrt{r^2 - y^2}}$,

$$\cos u = \frac{\sqrt{r^2 - y^2 - y^2 \sin a^2 \cotg b^2}}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{r^2 - \frac{y^2}{\sin B^2}}}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

$$y = \frac{r \cdot \sin u \cdot \sin B}{\sqrt{1 - \cos u^2 \cdot \sin B^2}}$$

und $\sqrt{r^2 - y^2} = \frac{r \cdot \cos B}{\sqrt{1 - \cos u^2 \cdot \sin B^2}}$

ergibt, so sind die beiden Grenzwerte von x , zwischen welchen die Grössen unter den obigen Integralzeichen zu nehmen sind:

$$x = \frac{\cos B \cdot \cos(a - u)}{\sqrt{1 - \cos u^2 \cdot \sin B^2}} = \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \cos(a - u)$$

und $x = \sqrt{r^2 - y^2}$.

Hierdurch findet man:

$$1) U = r \cdot \int [\arcsin(1) - \arcsin \{ \sin = \cos(a - u) \}] \cdot dy = r \cdot \int (a - u) \cdot dy$$

$$2) U \cdot \xi = r \cdot \int \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \sin(a - u) \cdot dy$$

$$3) U \cdot \eta = r \cdot \int y(a - u) \cdot dy$$

$$4) U \cdot \zeta = r \cdot \int \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \{1 - \cos(a - u)\} \cdot dy$$

Die erste und dritte Gleichung geben, wenn man die theilweise Integration anwendet:

$$U = ry(a - u) + r \int y \cdot du$$

$$U \cdot \eta = \frac{1}{2} ry^2(a - u) + \frac{1}{2} r \int y^2 \cdot du$$

und wenn man für y den oben angegebenen Werth durch u , nämlich

$$\frac{r \cdot \sin u \cdot \sin B}{\sqrt{1 - \cos u^2 \cdot \sin B^2}}$$

einsetzt:

$$U = ry(a - u) - r^2 \cdot \arcsin(\sin = \cos u \cdot \sin B)$$

$$U \cdot \eta = \frac{1}{2} ry^2(a - u) + \frac{1}{2} r^3 u - \frac{1}{2} r^3 \cdot \cos B \cdot \arcsin \left(\tan = \frac{\tan u}{\cos B} \right).$$

Diese Integrale sind offenbar von der Seite BC (oder ihrer Projection $B'C$) bis zum gegenüberliegenden Scheitel A auszudehnen, d. h. von $y = 0$ bis $y = r \cdot \sin b$, wobei man die entsprechenden Werthe von u erhält:

$$u = 0 \text{ und } u = \arcsin \left(\sin = \frac{\cotg B}{\cotg b} \right).$$

Da man aber in einem bei C rechtwinkligen sphärischen Dreieck hat:

$$\cotg B = \sin a \cdot \cotg b$$

$$\cos a \cdot \sin B = \cos A$$

$$\tang a = \cos B \cdot \tang c$$

so erhält man für die Integrale, wenn sie zwischen den gehörigen Grenzen genommen werden:

$$1) U = r^2(A + B - \frac{1}{2}\pi)$$

$$2) U \cdot \eta = \frac{1}{2} r^3 \cdot (a - c \cdot \cos B)$$

Das obige zweite Integral gibt, wenn man darin $\sin(a-u)$ auflöst, und für $\sin u$ und $\cos u$ die Werthe durch y einsetzt:

$$\begin{aligned} U \cdot \xi &= r \cdot \sin a \cdot \int \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \cos u \cdot dy - r \cdot \cos a \int \sqrt{r^2 - y^2} \cdot d \cdot \sin u y \\ &= r \cdot \sin a \int \sqrt{r^2 - \frac{y^2}{\sin^2 B}} \cdot dy - r \cdot \cos a \int y \cdot dy \\ &= \frac{1}{2} r \cdot \sin a \cdot \sqrt{r^2 - \frac{y^2}{\sin^2 B}} + \frac{1}{2} r^3 \cdot \sin a \sin B \operatorname{arc} \left(\sin = \frac{y}{r \sin B} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} r \cdot \cos a \cotg B \cdot y^2 \end{aligned}$$

und wenn man dieses zwischen den Grenzen $y=0$ bis $y=r \cdot \sin b$ nimmt:

$$U \cdot \xi = \frac{1}{2} r^3 \sin a \cos c \sin b + \frac{1}{2} r^3 c \sin a \sin B - \frac{1}{2} r^3 \cdot \cos a \cdot \cos B \sin b \cdot \frac{\sin b}{\sin B}$$

Da wir aber hierin $\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = \sin c$ setzen können, so wird wegen

der vorhin angeführten trigonometrischen Formel $\tang a = \cos B \cdot \tang c$ der letzte Term geradezu gleich dem ersten und die Gleichung reducirt sich auf:

$$3) U \cdot \xi = \frac{1}{2} r^3 c \sin a \sin B.$$

Nehmen wir endlich das vierte der obigen Integrale und setzen wieder für u die Werthe durch y , so wird:

$$\begin{aligned} U \cdot \zeta &= r \int \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \{1 - \cos(a-u)\} \cdot dy \\ &= r \int \sqrt{r^2 - y^2} \cdot dy - r \cos a \int \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \cos u \cdot dy - r \sin a \int \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \sin u \cdot dy \\ &= r \int \sqrt{r^2 - y^2} \cdot dy - r \cos a \int \sqrt{r^2 - \frac{y^2}{\sin^2 B}} \cdot dy - r \sin a \cotg B \int y \cdot dy \\ &= \frac{1}{2} r y \cdot \left\{ \sqrt{r^2 - y^2} - \cos a \sqrt{r^2 - \frac{y^2}{\sin^2 B}} - y \sin a \cotg B \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} r^3 \left\{ \operatorname{arc} \left(\sin = \frac{y}{r} \right) - \cos a \sin B \cdot \operatorname{arc} \left(\sin = \frac{y}{r \sin B} \right) \right\} \end{aligned}$$

und nimmt man dieses zwischen den Grenzen $y=0$ und $y=r \sin b$, so wird:

$$U. \zeta = \frac{1}{2} r^3 \sin b \left\{ \cos b - \cos a \cos c - \sin a \cos B \frac{\sin b}{\sin B} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} r^3 \left\{ b - c \cos a \sin B \right\}$$

oder da: $\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = \sin c$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin b \cos B$$

$$\cos a \sin B = \cos A$$

$$4) U. \zeta = \frac{1}{2} r^3 \left\{ b - c \cos A \right\}$$

Nimmt man für das sphärische Dreieck einen ganzen Octanten der Kugeloberfläche, so hat man $A=B=C=\frac{\pi}{2}$ und auch $a=b=c=\frac{\pi}{2}$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$U = \frac{\pi}{2} r^2$$

$$U. \xi = \frac{\pi}{4} r^3$$

$$U. \eta = \frac{\pi}{4} r^3$$

$$U. \zeta = \frac{\pi}{4} r^3$$

Der Schwerpunkt dieser Oberfläche ist also um den halben Radius von jeder der drei Coordinatenebenen entfernt. Er liegt also auf dem Radius, den man vom Mittelpunkt der Kugel nach der Mitte der Oberfläche des Octanten zieht und zwar um das Stück $\frac{1}{2} r \sqrt{3}$ vom Mittelpunkt entfernt.

Nimmt man noch einen Octanten dazu, so dass man den vierten Theil der Kugeloberfläche oder ein rechtwinkliges sphärisches Zweieck erhält, so liegt der Schwerpunkt auf dem Radius, der vom Mittelpunkt der Kugel nach der Mitte dieser Fläche gezogen wird und zwar um das Stück $r \sqrt{\frac{1}{2}}$ vom Mittelpunkt entfernt.

Nimmt man endlich noch ein eben solches Zweieck hinzu, so dass man die Halbkugel erhält, so zieht man wieder einen Radius nach der Mitte dieser Oberfläche, dann liegt deren Schwerpunkt auf diesem Radius und zwar um das Stück $\frac{1}{2} r$ vom Mittelpunkt der Kugel entfernt.

Mit Hilfe der vorhin gefundenen Werthe für die Coordinaten des Schwerpunkts eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks kann man auch den Schwerpunkt irgend eines beliebigen sphärischen Dreiecks finden. — Man denke sich nämlich (Fig. XXIX.) an das erste gegebene, bei C rechtwinklige Dreieck ABC ein anderes, ebenfalls bei C rechtwinkliges Dreieck ADC gelegt, welches die eine Kathete AC mit dem vorigen gemeinschaftlich hat, dann bilden BC und CD zusammenhängende Bögen eines und desselben grössten Kugelkreises und wir erhalten ganz im Allgemeinen ein sphärisches Dreieck ABD , in welchem durch den einen Scheitel A ein grösster Kugelkreis AC gelegt ist, der auf der Gegenseite senkrecht steht. Der Flächeninhalt des ersten Dreiecks ABC sei U' , die eine Seite a' , der gegenüberliegende Winkel A' ; in dem zweiten Dreieck ADC sei der Flächeninhalt $= U''$, die eine Seite a'' und ihr Gegenwinkel A'' . Bezeichnet man nun die Coordinaten des Schwerpunkts von $\triangle ABC$ durch ξ' , η' , ζ' und die des Schwerpunkts von $\triangle ADC$ durch ξ'' , η'' , ζ'' , so hat man zu deren Bestimmung nach dem Vorigen folgende beiden Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned} U' &= r^2 \left\{ A' + B - \frac{1}{2} \pi \right\} & U'' &= r^2 \left\{ A'' + D - \frac{1}{2} \pi \right\} \\ U' \cdot \xi' &= \frac{1}{2} r^3 c \sin B \sin a' & U'' \cdot \xi'' &= \frac{1}{2} r^3 d \sin D \sin a'' \\ U' \cdot \eta' &= \frac{1}{2} r^3 (a' - c \cos B) & U'' \cdot \eta'' &= \frac{1}{2} r^3 (a'' - d \cos D) \\ U' \cdot \zeta' &= \frac{1}{2} r^3 (b - c \cos A') & U'' \cdot \zeta'' &= \frac{1}{2} r^3 (b - d \cos A'') \end{aligned}$$

Nimmt man nun die Verbindungslinie des einen Dreiecks-Scheitels A mit dem Mittelpunkt der Kugel O als eine neue Axe und die senkrechte Entfernung des Schwerpunkts von $\triangle ABC$ von der in O auf AO senkrecht stehenden Ebene als eine neue Coordinate X' dieses Schwerpunkts an, und die analoge Entfernung von derselben Ebene als die entsprechende Coordinate X'' des Schwerpunkts des Dreiecks ADC , so hat man diese elementarsten Beziehungen zwischen zwei Coordinaten-Systemen, die einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt haben und deren x -Axen einen Winkel $= b$ mit einander machen:

$$X' = \xi' \cdot \cos b + \eta' \cdot \sin b; \quad X'' = \xi'' \cdot \cos b + \eta'' \cdot \sin b.$$

Hieraus ergeben sich aber die Momente der Schwerpunkte der beiden Dreiecke ABC und ADC in Bezug auf die in O auf AO senkrecht stehende Ebene:

$$U' \cdot X' = \frac{1}{2} r^3 c \sin B \sin a' \cos b + \frac{1}{2} r^3 (a' - c \cos B) \sin b$$

$$U'' \cdot X'' = \frac{1}{2} r^3 d \sin D \sin a'' \cos b + \frac{1}{2} r^3 (a'' - d \cos D) \sin b$$

oder da in jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck der *Sinus* einer Kathete gleich der *Tangente* der andern Kathete multiplicirt mit der *Cotangente* des dieser letztern gegenüberliegenden Winkels, also

$$\sin a' = \cotg B \cdot \tang b \text{ und } \sin a'' = \cotg D \cdot \tang b$$

ist: $U' \cdot X' = \frac{1}{2} r^3 a' \sin b$; $U'' \cdot X'' = \frac{1}{2} r^3 a'' \sin b$.

Nennt man nun U den Flächeninhalt des ganzen Dreiecks ABD und X die mit AO parallel laufende Coordinate seines Schwerpunkts; schreibt man ferner $A' + A'' = A$ und $a' + a'' = a$, so hat man

$$U = U' + U'' = r^2 \left\{ A + B + D - \pi \right\}$$

und da das Moment einer ganzen Figuration in Bezug auf jede beliebige, also auch z. B. in Bezug auf die in O auf AO senkrecht stehende Ebene gleich der Summe der Momente der einzelnen Theile in Bezug auf dieselbe Ebene sein muss:

$$U \cdot X = U' \cdot X' + U'' \cdot X''$$

oder: $(A + B + D - \pi) \cdot X = \frac{1}{2} r a \sin b$

d. h.
$$X = \frac{\frac{1}{2} r a \sin b}{A + B + D - \pi}.$$

Nun ist aber b ein von einem Scheitelpunkt A eines sphärischen Dreiecks ABD auf die Gegenseite a gefällttes Perpendikel, welches sich bekanntlich durch die drei Dreiecksseiten in folgender Weise ausdrücken lässt:

$$\sin b = \frac{2}{\sin a} \sqrt{\sin \frac{1}{2} (a + c + d) \sin \frac{1}{2} (-a + c + d) \sin \frac{1}{2} (a - c + d) \sin \frac{1}{2} (a + c - d)}$$

mithin wird, wenn man

$$\sqrt{\sin \frac{1}{2} (a + c + d) \sin \frac{1}{2} (-a + c + d) \sin \frac{1}{2} (a - c + d) \sin \frac{1}{2} (a + c - d)} = L \text{ setzt;}$$

$$X = \frac{a}{A + B + D - \pi} \cdot \frac{r \cdot L}{\sin a}$$

Dieses ist die senkrechte Entfernung des Schwerpunkts des ganzen Dreiecks ABD von einer Ebene, die in O senkrecht auf OA steht.

Wenn man ebenso von dem Scheitel B einen grössten Kreis senkrecht auf die gegenüberliegende Seite AD zieht, so wird ganz analog die senkrechte Entfernung desselben Schwerpunkts von einer Ebene, die in O senkrecht auf OB steht:

$$Y = \frac{d}{A + B + D - \pi} \cdot \frac{r \cdot L}{\sin d}$$

und ebenso findet man für die Entfernung Z des Schwerpunktes von einer Ebene, die in O senkrecht auf OD steht:

$$Z = \frac{c}{A + B + D - \pi} \cdot \frac{r \cdot L}{\sin c}.$$

Die 3 Ausdrücke X , Y , Z enthalten die vollständige Bestimmung der Lage des Schwerpunktes in unserem sphärischen Dreieck: sie legen ihn als den Durchschnittspunkt 3er Ebenen fest, welche in bekannten Abständen vom Mittelpunkte auf den 3 Radien OA , OB , OD perpendicular stehen. Um noch die Bestimmung der Coordinatenwerthe zu erhalten, nehme man den Mittelpunkt der Kugel zum Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, die Ebene AOB zur Ebene der xy und den Radius OA zur Axe der x . Alsdann ist der Winkel, welchen OD mit der Axe der x einschliesst, offenbar d und die beiden Winkel, welche dasselbe OD mit den Axen der y und x respektive einschliesst, mögen mit β und α bezeichnet werden. Ferner die Winkel der OB mit den Axen der z , y , x

sind $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} - c$, c und die Winkel der OA mit eben diesen Axen

$\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 0 . Um die beiden unbekannten Winkel β und γ zu bestimmen, bemerke man, dass

$$\cos^2 d + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

sein muss, sowie dass der Winkel zwischen OB und OD gleich a ist. Hieraus folgt nach einem bekannten Theoreme der analytischen Geometrie

$$\cos a = \cos c \cos d + \cos \left(\frac{\pi}{2} - c \right) \cos \beta + \cos \frac{\pi}{2} \cos \gamma$$

oder

$$\cos a = \cos c \cos d + \sin c \cos \beta.$$

Die letzte Gleichung giebt

$$\cos \beta = \frac{\cos a - \cos c \cos d}{\sin c} = \frac{\cos A \sin c \sin d}{\sin c} = \cos A \sin d$$

und die erste Gleichung geht durch diese Substitution über in

$$\cos^2 \gamma + \cos^2 A \sin^2 d + \cos^2 d = 1,$$

woher

$$\cos \gamma = \sin A \sin d$$

folgt. Nachdem auf diese Weise die Winkel, welche die 3 nach den Eckpunkten unseres Dreieckes gezogenen Radien mit den Coordinaten-axen einschliessen, vollständig bestimmt sind, hält es nicht schwer, die Gleichungen der 3 Ebenen anzugeben, deren Durchschnittspunkt in den gesuchten Schwerpunkt hineinfällt.

Zufolge eines bekannten Satzes der analytischen Geometrie ist die Gleichung einer Ebene, deren Abstand sowohl nach seiner Grösse durch die Masszahl e , als auch nach seiner Lage durch die 3 Winkel α, β, γ mit den Axen der x, y, z gegeben ist:

$$z \cos \gamma + y \cos \beta + x \cos \alpha = e$$

und hiernach werden die Gleichungen unserer 3 Ebenen:

$$z \sin A \sin d + y \cos A \sin d + x \cos d = Z$$

$$y \sin c + x \cos c = Y$$

$$x = X,$$

aus denen die Werthe der Coordinaten x, y, z des gesuchten Schwerpunktes leicht berechnet werden können.

Vierte Vorlesung.

Theorie der Kettenlinie.

§. 15.

Bisher haben wir angenommen, dass die Punkte, auf welche wir gewisse Kräfte wirkend denken, einen unveränderlichen Zusammenhang unter sich haben. Nun giebt es aber Systeme von Punkten, welche nicht in unveränderlicher Weise mit einander verbunden sind, und es sind die Bedingungen des Gleichgewichtes für einen solchen Fall festzustellen.

Betrachten wir (Fig. XXX.) einen unausdehnbaren, überall gleichartigen und vollkommen biegsamen Faden, und nehmen wir an, dass er unter der Einwirkung gewisser in den Angriffspunkten $A, B, C, D, \dots M$ angebrachter Kräfte $K, P_1, P_2, P_3, \dots K'$ im Zustande des Gleichgewichtes die Form der gebrochenen Linie $ABCD \dots M$ annehme. Die in den festen Endpunkten A und M wirkenden Kräfte kann man sich als Widerstände denken, vermöge deren die von den übrigen Kräften herührende Spannung ausgehalten wird, oder auch man kann sich in diesen

Punkten feste Rollen denken, über welche der Faden durch die Kräfte K und K' gezogen hinläuft. Die Kräfte $P_1, P_2, P_3, \dots$ brauchen nicht nothwendig in einer Ebene zu liegen und können als die Spannkkräfte gewisser in den Knotenpunkten $B, C, D, \dots$ festgeknüpfter Seile, entlang deren Richtungen sie wirken, vorgestellt werden. Ein solches System von Punkten $A, B, C, D, \dots, M$, wie es auf dem biegsamen Faden $ABCD \dots M$ enthalten ist, nennen wir ein Funikular- oder Seilpolygon, und es muss nun untersucht werden, welches Verhältniss die Kräfte $K, P_1, P_2, P_3, \dots, K'$ unter einander haben, wenn das System in Ruhe bleiben soll.

In dem Punkte B zunächst wirkt die Kraft K , welche ihn in der Richtung von B nach A zieht, ferner die Kraft P_1 entlang der Richtung des Seiles, an welchem sie angebracht ist, und endlich eine gewisse Kraft, welche ihn in dem Sinne von B nach C zu bewegen strebt und welche offenbar nur von der vereinigten Wirkung der übrigen Kräfte herkommen kann. Damit der Punkt B in Ruhe bleibe, müssen diese 3 Kräfte sich gegenseitig vernichten: mithin muss die Resultante von K und P_1 gleich und entgegengesetzt sein der Kraft, welche in dem Sinne von B nach C wirkt. Bezeichnen wir sie nach ihrer absoluten Grösse mit B' , so wird sie nach der Verlängerung von BC in dem Sinne von B nach B' gerichtet sein. Eine Kraft darf nach jedem Punkt ihrer Richtung verlegt werden: daher können wir die Kraft B' auch in C anbringen. Dann haben wir in C wiederum 3 Kräfte, die Kraft B' , die von C nach B wirkt, die Kraft P_2 und die Gesamtwirkung der übrigen Kräfte, welche den Punkt C nach D hintreibt. Damit Gleichgewicht sei, muss die vereinigte Wirkung der beiden ersten Kräfte gleich und entgegengesetzt sein der letzten Kraft. Also die Resultante C' von B' und P_2 muss rückwärts in der Richtung CC' wirken: dieselbe fällt absolut genommen geradezu mit der Resultante von K, P_1, P_2 zusammen. Mithin darf man, für den Fall des Gleichgewichtes, die 3 Kräfte K, P_1, P_2 sich geradezu nach dem Punkte C , als ihrem Anfangspunkte, transponirt denken. Ganz ebenso kann man sich die Kraft C' nach D verlegt denken, wo sie sich mit der Kraft P_3 zu der Resultante D' vereinigt, welche gleich und entgegengesetzt ist der Gesamtwirkung der Kräfte von der anderen Seite her. Die Kraft D' stellt wieder die Resultante der Kräfte K, P_1, P_2, P_3

dar, welche mithin als in dem Punkte D angreifend vorgestellt werden dürfen. In dieser Art kann man fortfahren und bekommt schliesslich alle vorhergehenden Kräfte $K, P_1, P_2, P_3, \dots$ in M vereinigt, deren Gesamtwirkung gleich und entgegengesetzt der Kraft K' sein muss. Also für den Fall des Gleichgewichtes kann man sich die sämtlichen Kräfte $K, P_1, P_2, P_3, \dots, K'$ parallel mit ihren Richtungen nach dem Endpunkte M transponiren: das Gleichgewicht des Seilpolygones ist auf das Gleichgewicht eines Punktes zurückgeführt, auf welchen eben dieselben Kräfte wirken wie auf das Seilpolygon oder die Bedingungsgleichungen, welche für das Gleichgewicht eines Punktes gelten, sind auch noch für das Gleichgewicht des Seilpolygons hinreichend.

Bezeichnen wir behufs ihres analytischen Ausdruckes die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte $K, P_1, P_2, P_3, \dots, K'$ mit den Axen der x, y, z einschliessen, respektive mit $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots, \alpha', \beta', \gamma'$: so müssen die Seitenresultanten der gegebenen Kräfte in jeder der 3 Axenrichtungen sich annulliren oder wir erhalten:

$$K \cos \alpha + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \dots + K' \cos \alpha' = 0$$

$$K \cos \beta + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + P_3 \cos \beta_3 + \dots + K' \cos \beta' = 0$$

$$K \cos \gamma + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + P_3 \cos \gamma_3 + \dots + K' \cos \gamma' = 0.$$

Dieses sind also die Relationen, welche die Kräfte $K, K', P_1, P_2, P_3, \dots$ nothwendig erfüllen müssen, damit Gleichgewicht statt habe.

Wenn wir uns der Herleitung dieser Gleichungen erinnern, so giebt uns dies Anlass zu einer wichtigen Bemerkung. Denken wir uns irgend eine bestimmte Fadenlinie, z. B. CD , so wird man sich, für den Fall des Gleichgewichtes, alle Kräfte auf der einen Seite, nämlich K, P_1, P_2 , in dem einen Endpunkte C vereinigt denken können und ganz nach demselben Raisonement lassen sich die Kräfte $P_3, \dots, K'$ auf der anderen Seite nach dem anderen Endpunkte D transponiren. Zugleich erhellt, dass beide Resultanten, da sie sich gegenseitig vernichten müssen, mit gleicher Intensität, aber im entgegengesetzten Sinne entlang des Fadens CD wirken. Die gemeinschaftliche Intensität der beiden Resultanten, mit welcher der Faden in der Richtung seiner beiden Verlängerungen fortgezogen wird, heisst seine **Spannung**. Im Allgemeinen wird die Spannung in einem Funikular-

polygon sich von einer Seite zur andern ändern: aber wie sie auch sonst beschaffen sein möge, immer wird sie sich sowohl nach ihrer Grösse als auch nach ihrer Richtung vermöge der Regel des Parallelogrammes der Kräfte als die Resultante sämtlicher Kräfte zusammensetzen lassen, welche auf einer beliebigen Seite des betrachteten Fadens liegen.

W. In der Praxis wirken meistentheils an einem gegebenen Seile und in gegebenen Richtungen gewisse gleichfalls gegebene Kräfte $P_1, P_2, P_3, \dots$, welche in den Punkten $B, C, D, \dots$ derartig angreifen, dass die Entfernungen $AB, BC, CD, \dots$ bekannte Längen darstellen, die wir mit $s_1, s_2, s_3, \dots$ bezeichnen wollen. Es ist auszumitteln, wie gross die Intensitäten der Kräfte K, K' und welches ihre Richtungen seien. Die Endpunkte A und M des Polygons sind gegeben. Mithin sind 8 unbekannte Grössen $K, K', \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ zu bestimmen, wozu die obigen 3 Bedingungsgleichungen nicht ausreichen. Indessen finden nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie noch die Relationen statt:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1,$$

und die 3 übrigen Gleichungen ergeben sich in Folge des Umstandes, dass wir die Entfernung der Endpunkte A und M kennen. Nämlich die Projektion dieser Entfernung auf eine beliebige der 3 Axen muss gleich sein der Summe von den Projektionen sämtlicher Polygonseiten auf dieselbe Axe. Mögen also die Winkel, welche die Polygonseiten $AB, BC, CD, \dots$ mit den Axen der x, y, z einschliessen, nach einander mit $\alpha, \beta, \gamma; a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; \dots \alpha', \beta', \gamma'$ bezeichnet werden, sowie die bezeichnete Entfernung mit l und ihre respektiven Projektionen, welche gleichfalls bekannte Grössen sind, mit l_x, l_y, l_z : so folgen sofort die 3 Gleichungen:

$$l_x = s_1 \cos \alpha + s_2 \cos a_1 + s_3 \cos a_2 + s_4 \cos a_3 + \dots$$

$$l_y = s_1 \cos \beta + s_2 \cos b_1 + s_3 \cos b_2 + s_4 \cos b_3 + \dots$$

$$l_z = s_1 \cos \gamma + s_2 \cos c_1 + s_3 \cos c_2 + s_4 \cos c_3 + \dots$$

und die Zahl der Bestimmungsgleichungen wäre vollständig, wenn $\cos a_1, \cos b_1, \cos c_1, \cos a_2, \cos b_2, \cos c_2$ etc. bekannte Ausdrücke wären. Dies sind sie nun freilich nicht: vielmehr ist ihre analytische Bestimmung ziemlich verwickelt und führt zu ganz intraktabeln Ausdrücken: doch kann

man wenigstens ohne besondere Mühe die Möglichkeit ihrer Bestimmung nachweisen.

Bekanntlich ist eine Gerade durch ihre Richtung und einen speciellen Punkt auf ihr vollständig bestimmt. Nehmen wir nun für den Augenblick an, die Richtung von AB , d. h. die Winkel α, β, γ wären bestimmt, so müsste es auch der Punkt B sein, weil der Punkt A und die Länge $AB = s$ gegeben ist. Diesen Punkt kann man auch als einen Punkt auf BC ansehen: folglich ist die genannte Gerade, da ihre Richtung sich vermöge des Parallelogrammes der Kräfte aus der Kraft K , die wir uns nach B transponirt denken, und aus der bekannten Kraft P_1 ergibt, vollständig bestimmt und, weil BC eine gegebene Länge hat, zugleich der Punkt C . So geht man weiter fort und erhält allmählich die Bestimmung aller Polygonseiten; dieselbe zurückgeführt auf lauter bekannte Grössen und auf die Unbekannten K, α, β, γ . Wenn eine Gerade bestimmt ist, so sind es auch ihre Winkel mit den Coordinatenachsen, sowie deren trigonometrische Funktionen. Demgemäss resultiren die verschiedenen Ausdrücke $\cos a, \cos b, \cos c$ als Funktionen von K, α, β, γ und nach deren Substitution in die 3 letzten Gleichungen werden dieselben bloß noch die früheren Unbekannten enthalten und mithin die Zahl der Bestimmungsgleichungen voll machen.

§. 16.

Die Lehre von den Funikularpolygonen findet ihre wichtigste Anwendung bei der Kettenlinie.

Wir betrachten einen durchaus homogenen, vollkommen biegsamen Faden von überall gleicher Dicke (Fig. XXXI.) und nehmen an, er sei in seinen Endpunkten K und K' befestigt. Durch den Einfluss der Schwere wird der Faden niedergezogen und, wenn Gleichgewicht eingetreten ist, eine bestimmte Krümmung zeigen, deren Form man unter dem Namen der Kettenlinie begreift. Die Befestigung des Fadens oder der Kette in den beiden Endpunkten wird einen gewissen Widerstand erzeugen, der sich am Ende mit der den Faden anspannenden Schwerkraft ins Gleichgewicht setzt und dadurch den Zustand der Ruhe herbeiführt: diese beiden Widerstandskräfte sollen mit K und K' bezeichnet werden. Legen wir uns nun durch deren Angriffspunkte K und K' eine Vertikalebene,

die wir zur Ebene der x, y wählen, so sieht man sogleich, dass die Kettenlinie mit Nothwendigkeit in diese Ebene hineinfällt. Denn die Kräfte, welche den Faden etwa in Bewegung setzen könnten, sind blos die Gewichte seiner einzelnen Theile, und da diese in vertikalem Sinne ziehen, so ist kein Grund denkbar, weshalb er aus der Richtung der bezeichneten Vertikalebene herausgelenkt werden sollte. Nun wollen wir geradezu die durch K gelegte Horizontale zur Axe der x , sowie die Vertikale durch denselben Punkt zur Axe der y nehmen; die positiven y sollen von oben nach unten gerechnet werden. Dann werden die wirkenden Kräfte ausser den Widerstandskräften K und K' noch die Gewichte $P_1, P_2, P_3, \dots$ des Seiles in den einzelnen Punkten sein: da dieselben alle parallel mit den Axen der y gerichtet sind, so sind ihre Winkel mit den Axen der x sämmtlich $= 90^\circ$, die mit der Axe der y sämmtlich gleich 0, und die mit der Axe der z , d. h. mit der Senkrechten, die durch den Punkt K sich auf der Ebene der xy errichten lässt, sämmtlich gleich 90° . Ebenso gross werden auch die Winkel der Widerstandskräfte K und K' mit dieser letzten Axe sein, während deren Winkel mit den Axen der x und der y vorläufig noch als willkürliche Constante gelten. Daher haben wir in den Gleichgewichtsgleichungen des vorigen §. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 90^\circ$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = 0$, $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma' = 90^\circ$ einzusetzen: hierdurch werden sich die beiden Seiten der 3ten Gleichung gänzlich annulliren, wie es sein muss, da unsere Curve vollständig in die Ebene der x, y hineinfällt: die beiden ersten Gleichungen dagegen werden:

$$K \cos \alpha + K' \cos \alpha' = 0,$$

$$K \cos \beta + K' \cos \beta' + P_1 + P_2 + P_3 + \dots = 0,$$

und die Summe der verschiedenen P wird hier offenbar nichts anderes sein, als das Gewicht der ganzen Kette, welche aufgehangen wird. Statt diese beiden Gleichungen zu discutiren, wird es, da es uns um die allgemeine Natur der Kettenlinie zu thun ist, nöthig sein, einen beliebigen Punkt derselben in unsere Betrachtung hineinzunehmen. Sei dieser Punkt L und seine Coordinaten x und y : dann wird in demselben doch eine gewisse Spannung T statthaben, deren Richtung in die Tangirende hineinfallen muss. Die Winkel der Tangirenden mit den beiden Axen sollen u und v sein, so dass

ist, ferner die Länge des Bogens KL gleich s , das Gewicht der Längeneinheit des Fadens gleich p und folglich das Gewicht der ganzen Bogenlänge gleich ps . Alsdann geben die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der Fadenlinie KL , an deren Endpunkten die Kräfte K und T wirken,

$$K \cos \alpha + T \cos u = 0, \quad K \cos \beta + T \cos v + P_1 + P_2 + P_3 + \dots = 0$$

oder, da die Summe der Gewichte P offenbar nichts anderes als das Gewicht ps des Bogens KL ist,

$$-T \cos u = K \cos \alpha; \quad -T \cos v = K \cos \beta + ps.$$

In diesen Gleichungen ist, da die Kraft K in dem Sinne von K nach M wirkt, $\beta = YKM$, $\alpha = XKM$; mithin $\cos \beta = \cos YKM = -\cos YKN = -\sin XKN$, $\cos \alpha = \cos XKM = -\cos XKN$. Daher, wenn wir jetzt unter dem Winkel α den Winkel XKN verstehen, können wir in den vorhergehenden Gleichungen $\cos \alpha$ durch $-\cos \alpha$, $\cos \beta$ durch $-\sin \alpha$ ersetzen und erhalten:

$$T \cos u = K \cos \alpha; \quad T \cos v = K \sin \alpha - ps.$$

Aus diesen Gleichungen folgt wegen $\cos^2 u + \cos^2 v = 1$ durch Division

$$\frac{\cos v}{\cos u} = \frac{\sin u}{\cos u} = \tan u = \frac{K \sin \alpha - ps}{K \cos \alpha}$$

oder zufolge des bekannten Theorems, nach welchem die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen der Tangirenden und der Axe der x den

Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ zum Ausdrucke hat

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{K \sin \alpha - ps}{K \cos \alpha}.$$

Dies ist die Differentialgleichung unserer Curve und es sind in ihr K und α Constanten, über welche wir noch weiter unten handeln werden, dagegen s variabel, indem es durch die Formel

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

als Funktion von x sich bestimmt. Wenn man dagegen die beiden letzten Gleichungen, in denen T vorkommt, erst quadriert und dann addirt, so erhält man

$$(2) \quad T = \sqrt{K^2 - 2psK \sin \alpha + p^2 s^2}.$$

Die Spannung ist demgemäss eine Funktion des Bogens unserer Curve.

Es ist von Interesse, denjenigen Werth des s zu bestimmen, für welchen dieselbe ein Maximum oder ein Minimum wird. Zu dem Zwecke differentiiren wir die Gleichung (2) nach s , wodurch

$$\frac{dT}{ds} = \frac{-2pK \sin \alpha + 2p^2 s}{\sqrt{K^2 - 2psK \sin \alpha + p^2 s^2}}$$

erhalten wird. Dieser Ausdruck annullirt sich für

$$s = \frac{K \sin \alpha}{p}$$

und diesem Werthe von s entspringt die Spannung

$$T = K \cos \alpha.$$

Dieselbe ist ein Minimum, weil $\frac{d^2 T}{ds^2}$ für den bezeichneten speciellen Werth des s von demselben Vorzeichen mit T ausfällt. Für eben diesen Werth ergibt sich noch $\frac{dy}{dx} = 0$, d. h. die Tangirende in dem entsprechenden Punkte läuft mit der Axe der x parallel oder der Punkt, in welchem die geringste Spannung statt findet, ist zugleich der tiefste Punkt der Curve.

Um nun die Gleichung der Curve zwischen x und y selbst herzustellen, differentiiren wir die Gleichung (1), wodurch wir

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{r}{K \cos \alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

erhalten und setzen

$$\frac{dy}{dx} = u, \text{ also } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = u \frac{du}{dy};$$

so folgt:

$$\frac{u du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{p dy}{K \cos \alpha},$$

woher

$$\sqrt{1 + u^2} = -\frac{p y}{K \cos \alpha} + \text{Const.}$$

Die Constante ergibt sich aus den zusammengehörigen Werthen für den Punkt K , nämlich $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = u = \tan \alpha$, und wenn man ihren Werth

sowie wieder $\frac{dy}{dx}$ für u einsetzt, so kommt

$$(3) \quad K - py = K \cos \alpha \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Vermittelst Elimination von $\frac{dy}{dx}$ aus den Gleichungen (1) und (3) kann man beiläufig auch den Bogenausdruck der Curve als Funktion von y erhalten, nämlich

$$(4) \quad s = \frac{K \sin \alpha \pm \sqrt{(K - py)^2 - K^2 \cos^2 \alpha}}{p},$$

wo wegen des doppelten Vorzeichens die weiter unten folgende Bemerkung nachzusehen ist. Die gesuchte Curve ist mithin auf jeden Fall rectificirbar. Zugleich wollen wir schon jetzt uns aus der Gleichung (3) die Ordinate des tiefsten Punktes berechnen, weil wir für das Folgende deren Werth gebrauchen. Für diesen Punkt ist $\frac{dy}{dx} = 0$, $y = RS$ und mithin

$$K - p \cdot RS = \pm K \cos \alpha.$$

Wir dürfen hier nur das obere Vorzeichen nehmen: denn für den Fall $\alpha = 0$ geht die Kettenlinie bei straffer Anspannung geradezu in eine Horizontallinie über und muss sich RS annulliren. In Rücksicht auf diese Bemerkung folgt:

$$RS = \frac{K}{p} (1 - \cos \alpha).$$

Um nun die Gleichung (3) weiter zu integriren, bringen wir sie auf die Form

$$(5) \quad dx = \frac{\pm K \cos \alpha dy}{\sqrt{(K - py)^2 - K^2 \cos^2 \alpha}}.$$

Die Bedeutung des doppelten Zeichens ergibt sich auf eine einfache Weise. Der Zuwachs des x oder das Differential dx soll positiv sein, sowohl wenn der Zuwachs dy von y positiv, als wenn er negativ ausfällt: das heisst nichts anderes, als dass x beständig wächst, eben sowohl wenn y zunimmt, als auch wenn y abnimmt. Die y werden bis zu dem tiefsten Punkte wachsen, dessen Ordinate RS wir so eben bestimmt haben, und von da werden sie wieder abnehmen. Die Kettenlinie wird also einen absteigenden und einen aufsteigenden Theil haben: dem ersteren entspricht das obere, dem zweiten das untere Vorzeichen.

Das Integral der letzten Differentialgleichung ist übrigens:

$$x = \text{Const} + \frac{K \cos \alpha}{p} \lg \left\{ K - py \mp \sqrt{(K - py)^2 - K^2 \cos^2 \alpha} \right\}.$$

Um die Constante für den absteigenden Bogen KS zu bestimmen bemerken wir, dass sich die Coordinatenwerthe $x = 0$ und $y = 0$ entsprechen. Man erhält

$$x = \frac{K \cos \alpha}{p} \lg \left\{ \frac{K - py - \sqrt{(K - py)^2 - K^2 \cos^2 \alpha}}{K(1 - \sin \alpha)} \right\}.$$

Was den aufsteigenden Bogen anbetrifft, so bestimmen wir die Constante durch den tiefsten Punkt S , der sowohl im absteigenden wie im aufsteigenden Bogen liegt. In ersterer Hinsicht erhalten wir durch Einsetzung des Werthes von RS in die letzte Gleichung als die zusammengehörigen Coordinaten des Punktes S :

$$(6) \quad RS = \frac{K(1 - \cos \alpha)}{p} = \frac{2K \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{p}; \quad RK = \frac{K \cos \alpha}{p} \lg \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} \\ = \frac{K \cos \alpha}{p} \lg \cot (45^\circ - \frac{1}{2} \alpha).$$

Vermöge dieser Werthe bestimmt sich die Constante für den aufsteigenden Bogen und man erhält dessen Gleichung:

$$x = \frac{K \cos \alpha}{p} \lg \left\{ \frac{K - py + \sqrt{(K - py)^2 - K^2 \cos^2 \alpha}}{K(1 - \sin \alpha)} \right\}.$$

Die Gleichungen für den absteigenden und für den aufsteigenden Curvenbogen lassen sich offenbar in eine einzige zusammenfassen, nämlich in die Gleichung:

$$(7) \quad x = \frac{K \cos \alpha}{p} \lg \left\{ \frac{K - py \mp \sqrt{(K - py)^2 - K^2 \cos^2 \alpha}}{K(1 - \sin \alpha)} \right\},$$

wo sich das obere Vorzeichen auf den erstgenannten, das untere auf den zweitgenannten Bogen bezieht.

Untersuchen wir nun die Spannungsverhältnisse etwas genauer, welche in den einzelnen Punkten der Curve stattfinden und geben zunächst den Gleichungen (2) und (4) die Form

$$T = \sqrt{K^2 \cos^2 \alpha + (ps - K \sin \alpha)^2}$$

$$(ps - K \sin \alpha)^2 = (K - py)^2 - K^2 \cos^2 \alpha,$$

so giebt die Substitution der letzten in die erste augenblicklich die Gleichung:

$$(8) \quad T = K - py.$$

Die Spannung drückt sich demgemäss äusserst einfach als eine lineare Funktion von der Ordinate des zugehörigen Curvenpunktes aus. Zerlegen wir sie nach den Richtungen der beiden Axen, so ist der Ausdruck für die Horizontalspannung $T \frac{dx}{ds}$, und der Ausdruck für die Vertikalspannung $T \frac{dy}{ds}$, indem bekanntlich $\frac{dx}{ds}$ und $\frac{dy}{ds}$ die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche die Richtung der Spannung, d. h. die Berührungslinie, mit den Axen der x und y einschliesst. Nun folgt aus den Gleichungen (3) und (4)

$$\frac{dx}{ds} = \frac{K \cos \alpha}{K - py}$$

$$\frac{dy}{ds} = \pm \frac{\sqrt{(K - py)^2 - K^2 \cos^2 \alpha}}{K - py} = \frac{K \sin \alpha - ps}{K - py},$$

und wir erhalten demgemäss die Componenten der Spannung

$$(9) \quad T \frac{dx}{ds} = K \cos \alpha; \quad T \frac{dy}{ds} = K \sin \alpha - ps.$$

Die Deutung dieser Resultate ist einfach. Das erste giebt augenblicklich folgendes Theorem:

Die Horizontalspannung auf einer Kettenlinie ist für alle Punkte dieselbe, nämlich die horizontale Componente des Widerstandes in den Aufhängepunkten.

Um zur Deutung des zweiten Resultates zu gelangen, bemerke man, dass zufolge Formel (4) die Bogenlänge

$$s_0 = KS = \frac{K \sin \alpha}{p}$$

wird: mithin muss $K \sin \alpha$ das Gewicht des Bogens KS bezeichnen und drückt die Differenz $K \sin \alpha - ps$ das Gewicht des Bogens LS aus. Man darf daher nun den folgenden Satz aussprechen:

Die Vertikalspannung, welche in einem beliebigen Punkte der Kettenlinie stattfindet, ist gleich dem Gewichte des unter ihm befindlichen Theiles der Kette, dieselbe bis zum tiefsten Punkte gerechnet.

Ehe wir die Betrachtung der Kettenlinie abschliessen, wollen wir noch die gewöhnliche Form herleiten, in welcher sie discutirt zu werden

pflegt. Zunächst kehre man die Gleichung (7) in Bezug auf die Variablen x und y um. Man erhält hierdurch

$$(10) \quad K - py = K \frac{1 - \sin \alpha}{2} e^{\frac{px}{K \cos \alpha}} + K \frac{1 + \sin \alpha}{2} e^{-\frac{px}{K \cos \alpha}}.$$

Nun führe man die neuen Coordinaten

$$\eta = \frac{K - py}{p} = \frac{T}{p}, \quad \xi = x - \frac{K \cos \alpha}{p} \lg \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$$

ein, d. h. man setze in die vorige Gleichung $K - p\eta$ statt py und $\xi + \frac{K \cos \alpha}{p} \lg \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$ statt x ein, und setze noch um der Abkürzung willen

$$h = \frac{K \cos \alpha}{p}.$$

Alsdann erhält man nach mehrfachen Reduktionen die transformirte Gleichung der Kettenlinie:

$$\eta = \frac{h}{2} \left\{ e^{\frac{\xi}{h}} + e^{-\frac{\xi}{h}} \right\}.$$

Im Betreff des Coordinatensystems, auf welches diese Gleichung bezogen wird, ist zu bemerken, dass die Richtung der neuen Axen der Richtung der alten Axen parallel ist. Dagegen ist, da die Werthe $\xi = 0$ und $x = \frac{K \cos \alpha}{p} \lg \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$ einander entsprechen, der Anfangspunkt in der

Richtung der Axe der x um die Strecke $\frac{K \cos \alpha}{p} \lg \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$ fortgerückt:

die Axe der η ist also die Vertikale, welche durch den tiefsten Punkt S der Curve geht. Die Ordinate des neuen Anfangspunktes auf der be-

zeichneten Vertikale ist $y = \frac{K}{p}$, da dieser Werth der Annahme $\eta = \frac{K - py}{p} = 0$ entspricht: sie ist so gross als die Länge eines mit der

Kette gleichartigen Fadens ausmacht, dessen Gewicht der Widerstandskraft K gleich ist. Für den derartig bestimmten Anfangspunkt hat man zufolge der Gleichung

$$\eta = \frac{T}{p},$$

die merkwürdige Relation, dass die Ordinate η geradezu die Länge eines

solchen Theiles der Kette darstellt, dessen Gewicht die Spannung T in dem bezüglichen Curvenpunkte erzeugt. Die Componenten der Spannung $T = p\eta$ sind die veränderliche Kraft $p\sigma$, wenn man den Bogen LS mit σ bezeichnet, und die constante Kraft $K \cos \alpha = p\sqrt{\eta^2 - \sigma^2}$. Mithin erhellet die bekannte Eigenschaft der Kettenlinie, derzufolge der Ausdruck

$$\eta^2 - \sigma^2 = \frac{1}{h^2}$$

eine constante Grösse bleibt, wo immer der Punkt L auf derselben angenommen werden möge.

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn man in der transformirten Gleichung für die Potenzen der Grösse e die respektiven Reihen einführt, ohne Weiteres

$$\eta = h \left(1 + \frac{1}{1.2} \frac{\xi^2}{h^2} + \frac{2}{1.2.3.4} \frac{\xi^4}{h^4} + \dots \right)$$

folgt. Da K im Allgemeinen eine ziemlich beträchtliche Grösse sein wird, so ist $\frac{1}{h}$ eine so kleine Grösse, dass man ihre höheren Potenzen vernachlässigen und mithin

$$\eta = h + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{h}$$

gesetzt werden darf. Die Kettenlinie wird daher in vielen Fällen geradezu als eine Parabel angesehen werden dürfen.

Es bleibt nun noch die Bestimmung der Constanten K und α übrig, welche von der gegenseitigen Lage der Punkte K und K' abhängen. Denken wir uns grösserer Einfachheit willen die Linie KK' geradezu als Horizontale, so kommt es darauf an, was wir als gegeben annehmen. Sei die Länge der Kette und die Entfernung der beiden Aufhängepunkte gegeben, nämlich

$$KSK' = 2l, \quad KK' = 2d;$$

so können wir uns die beiden Constanten K und α berechnen, d. h. die Grösse des Widerstandes, welchen die beiden Aufhängepunkte zu ertragen haben, und die Richtung, in welcher er geleistet wird. Für den tiefsten Punkt der Kette ist die Bogenlänge

$$l = \frac{K \sin \alpha}{p},$$

wo p eine leicht bestimmbare Constante bezeichnet; nämlich sie ist das

Gewicht der ganzen Kette dividirt durch das Mass ihrer Länge. Ferner haben wir

$$KR = d = \frac{K \cos \alpha}{p} \lg \cot(45^\circ - \frac{1}{2} \alpha)$$

und diese Gleichung durch die vorige dividirt giebt:

$$\frac{d}{l} = \cot \alpha \lg \cot(45^\circ - \frac{1}{2} \alpha)$$

oder, wenn man wegen der leichteren Berechnung zu den Briggs'schen Logarithmen übergeht:

$$\frac{d}{l} \log e = \cot \alpha \log \cot(45^\circ - \frac{1}{2} \alpha).$$

Aus dieser Gleichung lässt sich α , sei es in Form einer unendlichen Reihe oder durch Näherung, bestimmen. Im letzteren Falle kann man, um eine erste Näherung zu erhalten, sich das $\cos \alpha$ und mithin auch das α selbst vermöge der Näherungsformel

$$\cos^3 \alpha - 4 \cos \alpha + \frac{3d}{l} \log e = 0$$

bestimmen, welche sich leicht aus der vorhergehenden herleiten lässt, wenn man bedenkt, dass

$$\log \cot(45^\circ - \frac{1}{2} \alpha) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$$

ist, für $\log \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = \lg(1 + \sin \alpha) - \lg(1 - \sin \alpha)$ die Reihenentwicklung setzt und alle höheren Potenzen von $\sin \alpha$, als die dritte in solcher, vernachlässigt. Die Benutzung der bezeichneten Gleichung ist insbesondere in allen solchen Fällen vortheilhaft, in denen α einen Winkel unter 45° bedeutet.

Um ein specielleres Beispiel zu haben, sei

$$2l = 30', \quad 2d = 10' \quad \text{also} \quad \frac{d}{l} \log e = 0,144765.$$

Hierdurch wird die Gleichung, die wir auflösen müssen:

$$\cot \alpha \log \cot(45^\circ - \frac{1}{2} \alpha) - 0,144765 = 0.$$

Um zuerst eine oberflächliche Näherung zu erhalten, untersuchen wir die Wurzeln unserer cubischen Hülfsgleichung für $\cos \alpha$. Die einzige, deren absoluter Werth kleiner als die Einheit ausfällt, liegt zwischen $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{9}$, und zwar näher an der letzteren Zahl. Daher nehmen wir den zu $\cos \alpha$

$=\frac{1}{2}$ gehörigen Winkel $\alpha=83^{\circ}40'$ als ersten Grenzwert an. Durch dessen Substitution geht die rechte Seite unserer Gleichung in $-0,005242$ über, so dass er schon ziemlich nahe kommen muss. Da er zu gross ist (nämlich für $\alpha=0$ ergibt sich der Werth des ersten Gliedes links nach der bekannten Methode der Differentialrechnung $\infty \cdot 0=1$, so dass der Werth der ganzen rechten Seite positiv ausfällt; mithin findet zwischen $\alpha=0$ und $\alpha=83^{\circ}40'$ ein Zeichenwechsel statt, oder mit anderen Worten, die gesuchte Wurzel liegt zwischen diesen Werthen), so versuchen wir es mit der Substitution $\alpha=83^{\circ}$, vermöge deren man die Zahl $+0,004236$ als den Werth rechts bekommt. Mithin entsprechen den beiden Grenzwerten

$$\alpha=83^{\circ}, 83^{\circ}40'$$

die beiden Werthe der rechten Seite unserer Gleichung:

$$+0,004236, -0,005242.$$

Da wir offenbar schon ziemlich nahe an das richtige Resultat heranstreifen, so dürfen wir die Differenzen zwischen nahe bei einander liegenden Substitutionen als nahezu proportional mit den Differenzen zwischen den bezüglichen Werthen der linken Seite annehmen und es ist, wenn man noch $\alpha=83^{\circ}\beta'$ setzt:

$$83^{\circ}40' - 83^{\circ} : 83^{\circ}\beta' - 83^{\circ} = -0,005242 - 0,004236 : 0 - 0,004236$$

oder

$$40' : \beta = 9478 : 4236, \text{ also } \beta = 18'.$$

Nunmehr machen wir die beiden Substitutionen:

$$\alpha = 83^{\circ}18', 83^{\circ}19'$$

und finden als respektive Werthe der linken Seite

$$+0,000030, -0,000187.$$

Setzen wir daher $\alpha=83^{\circ}18'\gamma''$, so gilt, da

$$0,000030 + 0,000187 = 0,000217$$

ist, die Proportion

$$60'' : \gamma = 0,000217 : 0,000030,$$

woher

$$\gamma = 8'' \text{ also } \alpha = 83^{\circ}18'8''$$

folgt. Jetzt, da α bestimmt ist, hält es nicht schwer, den Ausdruck für K gleichfalls zu berechnen. Man bedient sich hierbei einer der beiden Gleichungen:

$$d = \frac{K \cos \alpha}{p} \frac{\log \cot (45^\circ - \frac{1}{2} \alpha)}{\log e}, \quad l = \frac{K \sin \alpha}{p}.$$

Z. B. die letzte giebt, wenn $p = 2 \text{ \AA.}$ gefunden wird,

$$\log K = 1,480095, \quad K = 30,206 \text{ \AA.}$$

Es möge beiläufig noch die grösste Tiefe der Kette

$$RS = \frac{2 K \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{p}$$

für den vorliegenden Fall angegeben werden. Man findet dieselbe gleich 13,345.

Die Länge der Kette dürfte in der Praxis wohl nur selten gegeben sein. Weit näher liegt es vielmehr, dass die Entfernung d der beiden Aufhängepunkte und die grösste Tiefe h gegeben ist, indem die Aufhängepunkte K und K' als auf denselben Horizontalen liegend betrachtet werden. Die Bestimmung von K und α ist alsdann in den beiden Gleichungen

$$h = \frac{2 K \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{p}, \quad d = \frac{K \cos \alpha}{p} \lg \cot (45^\circ - \frac{1}{2} \alpha)$$

enthalten, aus deren Division noch die dritte Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{h} &= \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha} \lg \cot (45^\circ - \frac{1}{2} \alpha) \\ &= \frac{1}{2} (\cot^2 \frac{1}{2} \alpha - 1) \lg \frac{1 + \tg \frac{1}{2} \alpha}{1 - \tg \frac{1}{2} \alpha} \end{aligned}$$

folgt. In der letzten Gleichung kann man auch noch auf der rechten Seite die gleichgeltende logarithmische Reihe einführen, wodurch dieselbe nach einigen leichten Transformationen folgende Gestalt bekommt:

$$\frac{d}{h} \tg \frac{1}{2} \alpha = 1 - \frac{2}{1.3} \tg^2 \frac{1}{2} \alpha - \frac{2}{3.5} \tg^4 \frac{1}{2} \alpha - \frac{2}{5.7} \tg^6 \frac{1}{2} \alpha - \dots$$

Die Reihe rechts ist immer convergent, weil der Winkel α niemals grösser als 90° werden kann; sobald er die Grösse von 45° nicht bedeutend überschreitet, wird die Beschränkung auf nur wenige Glieder der Reihe vollkommen genügen. Nachdem α vermöge dieser letzten oder der vorhergehenden Gleichung berechnet ist, fällt die Bestimmung der zweiten Constanten K nicht schwer.

Fünfte Vorlesung.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeit.

§. 17.

Man hat bekanntlich das ganze Gebäude der Statik auf 3 Principien basirt: auf das Princip des Hebels, auf das Princip des Parallelogramms der Kräfte und auf das Princip der virtuellen Geschwindigkeit. Die beiden ersten Principien haben wir vollständig kennen gelernt: wir müssen nun zu dem letztern übergehen, welches von Lagrange in seiner *Mécanique analytique* an die Spitze gestellt worden ist.

Wenn man irgend ein System von Punkten und daran wirkenden Kräften hat und diesem Systeme eine unendlich kleine Bewegung mittheilt, so wird offenbar jeder Punkt einen unendlich kleinen Weg beschreiben, und diese unendlich kleinen Wege nennt man die augenblicklichen oder virtuellen Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte. Dieses vorausgesetzt, kann das in Rede stehende Princip wie folgt ausgesprochen werden:

Wenn die auf ein System von Punkten wirkenden Kräfte $P_1, P_2, P_3, \dots$ sind, und wenn man die einzelnen Wege der einzelnen Punkte für einen unendlich kleinen Zeitraum, d. h. ihre virtuellen Geschwindigkeiten auf der Richtung der verschiedenen Kräfte projecirt und diese Projektionen durch $p_1, p_2, p_3, \dots$ bezeichnet, so ist das System von Kräften im Gleichgewicht, wenn die Gleichung stattfindet:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + P_4 p_4 + \dots = 0,$$
d. h. die Summe der Produkte aus den Kräften in die Projektionen der virtuellen Geschwindigkeiten der Anheftungspunkte auf die Richtung der Kräfte muss gleich 0 sein.

Diese Projektionen der virtuellen Geschwindigkeiten sind positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem sie auf der Richtung der Kraft selbst oder auf deren Verlängerung liegen.

Bevor wir den allgemeinen Beweis für das Princip geben, wollen wir es für mehrere einzelne Fälle dadurch verificiren, dass wir die bekannten Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts vermöge der An-

wendung dieses Principis uns herzuleiten versuchen. Zunächst geschehe dieses mit dem Principe des Hebels.

a) Wir denken uns irgend einen Stab mCm' in dem Punkte C unterstützt und an dessen beiden Endpunkten mögen die Kräfte P und P' wirken. Wenn man diesem Systeme von materiellen Punkten eine unendlich kleine Bewegung mittheilt, so kann dieselbe, da der Punkt C unterstützt ist, nur in einer Drehung der starren Linie mCm' um den Punkt C bestehen, vermöge deren die letztere in die Lage nCn' versetzt werden soll. Nun fälle man $na \perp Pb$ und $n'a' \perp P'b'$: so stellen offenbar die Kreisbögen mn und $m'n'$ die virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte m und m' dar und ma und $m'a'$ sind die Projektionen dieser unendlich kleinen Wege auf den Richtungen der Kräfte P und P' . Bezeichnen wir dieselben mit p und p' , so wird zufolge der getroffenen Uebereinkunft für unsere Figur $ma = p$, weil es auf der Verlängerung von Pm liegt, an und für sich negativ, dagegen $m'a' = p'$, weil es in die Richtung der $P'm'$ hineinfällt, an und für sich positiv sein. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten wird daher für unsern speciellen Fall sich in der Gleichung:

$$- Pp + P'p' = 0$$

aussprechen. Um diese Gleichung in geeigneter Weise umzuformen bemerken wir, dass die Wege mn und $m'n'$ concentrische Kreisbögen sind, welche zu gleichen Winkeln gehören und sich daher wie die zugehörigen Radien verhalten: mithin darf man

$$\frac{mn}{Cm} = \frac{m'n'}{Cm'} = t$$

setzen. -Ferner sind die eben genannten Bögen unendlich kleine Grössen und dürfen demgemäss als Gerade betrachtet werden, welche auf den respektiven Radien Cm und Cm' senkrecht stehen. Daher folgt, aus Gleichheit zweier Winkel, die Aehnlichkeit der Dreiecke Cbm und amn , sowie der Dreiecke $Cb'm'$ und $a'm'n'$. Mithin hat man

$$\frac{ma}{mn} = \frac{Cb}{Cm} \text{ also } ma = \frac{mn}{Cm} \cdot Cb = t \cdot Cb$$

$$\frac{m'a'}{m'n'} = \frac{Cb'}{Cm'} \text{ also } m'a' = \frac{m'n'}{Cm'} \cdot Cb' = t \cdot Cb'$$

Setzen wir die gefundenen Werthe für $p = ma$ und $p' = m'a'$ in

unserer obigen Bedingungsgleichung ein, so erhalten wir $-Pt.Cb + P'.t.Cb' = 0$ oder

$$P.Cb = P'.Cb',$$

d.h. wir erhalten die von früher bekannte Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht am Hebel, welche die Gleichheit der statischen Momente ausspricht.

b) Der zweite Fall, den wir besonders betrachten wollen, betrifft das Gleichgewicht eines Punktes, in welchem verschiedene Kräfte angreifen. Derselbe ist deswegen bemerkenswerth, weil hier die Bewegung, ohne dass das Princip aufhöre zu gelten, auch eine endliche sein darf. Mögen also auf den Punkt M die Kräfte $P, P_1, P_2, \dots$ wirken, deren Winkel mit den Axen der x, y, z respektive $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \dots$ seien. Die Richtung nun, in welcher wir dem Punkte eine sei es unendlich kleine oder endliche Bewegung ertheilen, ist vollkommen willkürlich, weil uns nichts zu einer einschränkenden Bestimmung nöthigt: sie schliesse mit den 3 Coordinatenaxen die Winkel a, b, c ein und möge durch die Weglänge v geschehen. Bezeichnen wir noch die Projektionen dieses Weges auf jeder der Krafrichtungen mit $p, p_1, p_2, \dots$, so muss, sofern unser Princip Gültigkeit hat, wenn der Punkt M im Gleichgewichte verharren soll, die Gleichung

$$Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 + \dots = 0$$

statt haben. Schreiben wir sie, wie folgt, um:

$$P \frac{p}{v} + P_1 \frac{p_1}{v} + P_2 \frac{p_2}{v} + P_3 \frac{p_3}{v} + \dots = 0;$$

so bedeuten die Quantitäten $\frac{p}{v}, \frac{p_1}{v}, \frac{p_2}{v}, \dots$ offenbar die trigonometrischen Cosinus der Winkel, welche die Projektionen $p, p_1, p_3, \dots$ mit dem projektirten Wege v einschliessen, und nach einem bekannten Theoreme der analytischen Geometrie werden dieselben durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\frac{p}{v} = \cos \alpha \cos a + \cos \beta \cos b + \cos \gamma \cos c$$

$$\frac{p_1}{v} = \cos \alpha_1 \cos a + \cos \beta_1 \cos b + \cos \gamma_1 \cos c$$

$$\dots \dots \dots$$

Die Substitution dieser Gleichungen in die vorige giebt:

$$\left. \begin{aligned} & (P \cos \alpha + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots) \cos a \\ & + (P \cos \beta + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \dots) \cos b \\ & + (P \cos \gamma + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \dots) \cos c \end{aligned} \right\} = 0.$$

Die Winkel a, b, c sind willkürlich, weil die Richtung, der sie angehören, gleichfalls willkürlich ist. Die vorhergehende Gleichung soll für alle mögliche Werthe von a, b, c bestehen: damit dies eintreten könne, muss nothwendig jeder der Coefficienten von $\cos a, \cos b, \cos c$ verschwinden, d. h. es muss gleichzeitig

$$P \cos \alpha + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots = 0$$

$$P \cos \beta + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \dots = 0$$

$$P \cos \gamma + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \dots = 0$$

sein. Dies sind die bekannten Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines Punktes, welche mithin vermöge des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten sich in eine einzige zusammenziehen lassen.

Uebrigens ist es leicht zu zeigen, dass die Gleichung

$$Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots = 0$$

nicht bloss eine nothwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung des Gleichgewichtes sei. Denn wenn man sie sich durch die Grösse v

dividirt denkt, so ist ein Ausdruck, wie $P \frac{p}{v}$, offenbar weiter nichts als die Composante der Kraft P in der Wegrichtung v : sie drückt mithin aus, dass die Seitenkräfte der gegebenen Kräfte $P, P_1, P_2, \dots$, welche sich auf die eben bezeichnete Richtung beziehen, zusammengenommen sich vernichten müssen. Dieses ist nun einmal nothwendig, damit Gleichgewicht sei, weil sonst eine gewisse Geschwindigkeit sich erzeugte, welche, da sie durch keine gleiche und entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit aufgehoben wird, den Punkt nothwendig forttriebe: weiter aber ist es auch hinreichend für das Gleichgewicht; denn wenn keine Bewegung in einer willkürlichen Richtung eintreten darf, so ist sie überhaupt in gar keiner möglich oder der Punkt bleibt in Ruhe.

§. 18.

Denken wir uns jetzt ein beliebiges System von Punkten $m_1, m_2, \dots$, auf welches gewisse Kräfte $P_1, P_2, \dots$ wirken: so wirkt auf jeden Punkt

m zunächst die Kraft P , welche unmittelbar an ihn angebracht ist, aber ausserdem noch eine Anzahl anderer Kräfte, welche von seiner festen Verbindung mit den übrigen Punkten herrühren, indem die Wirkung der an den übrigen Punkten angebrachten Kräfte durch diesen Zusammenhang auf ihn übertragen wird. Wir können den Einfluss der an den übrigen Punkten angebrachten Kräfte auf den Punkt m passend als die Spannung dieses Punktes bezeichnen. Mithin wird jeder Punkt durch jeden anderen eine gewisse Spannung erhalten und wir wollen diese Spannung zwischen 2 Punkten durch die Einführung eckiger Klammern bezeichnen, in welche hinein wir die betreffenden beiden Punkte setzen. Zufolge dieser Bezeichnung ist offenbar

$$[m_v, m_s] = [m_s, m_v];$$

denn wenn Gleichgewicht stattfinden soll, so muss die gegenseitige Spannung vollkommen gleich ausfallen. Ferner soll die Entfernung zwischen den beiden Punkten m_v und m_s in ähnlicher Weise durch rundliche Klammern angezeigt werden, also in dem angedeuteten Falle ist ihr Ausdruck (m_v, m_s) und wiederum

$$(m_v, m_s) = (m_s, m_v).$$

Wenn man nun dem ganzen Systeme eine unendlich kleine Bewegung mittheilt, so wird man sich bei solchen zwei Punkten, wie m_v und m_s , eine dreifache Bewegung denken können: nämlich es bewegt sich entweder bloß m_v , oder bloß m_s , oder beide Punkte ändern ihre Stellung gleichzeitig. Wir bekommen dadurch eine dreifache Aenderung ihres Abstandes, deren Betrag wir wie folgt bezeichnen wollen:

$$\Delta^v(m_v, m_s), \Delta^s(m_v, m_s), \delta(m_v, m_s).$$

Zwischen diesen drei Deltas gilt die Relation

$$\delta(m_v, m_s) = \Delta^r(m_v, m_s) + \Delta^s(m_v, m_s),$$

deren Richtigkeit sogleich erhellt, wenn man erwägt, dass es sich hier doch nur um unendlich kleine Veränderungen in den Stellungen der Anheftungspunkte handelt.

Denken wir uns zunächst einen Punkt m_1 fixirt, so wirkt auf diesen als ihren Anheftungspunkt die Kraft P_1 , ausserdem die Spanningskräfte $[m_1, m_2], [m_1, m_3], [m_1, m_4] \dots$, indem nach jedem folgenden Punkte eine gewisse Spannung stattfindet, vermöge deren der erste Punkt afficirt wird. Jetzt werde dem ganzen System und folglich auch dem be-

trachteten Punkte eine gewisse unendlich kleine Bewegung ertheilt und der Weg des Punktes m_1 auf die Richtungen der bezeichneten Kräfte projecirt und die Projektionen bezüglich mit $p_1, t_2, t_3, t_4, \dots$ bezeichnet. Dann wissen wir nach dem letzten der beiden im vorigen Paragraphen behandelten Fälle, für welchen wir das Princip der virtuellen Geschwindigkeit vollständig dargethan haben, wenn der Punkt im Gleichgewichte ist, so ist zu dessen Ausdruck die Bedingungsgleichung

$P_1 p_1 + [m_1, m_2] t_2 + [m_1, m_3] t_3 + [m_1, m_4] t_4 + m = 0$ ebensoviel erforderlich als hinreichend. Betrachten wir hier die Quantitäten $t_2, t_3, t_4, \dots$ näher. Der Punkt m_1 möge durch die ihm ertheilte unendlich kleine Bewegung in die Lage n (Fig. XXXIII.) versetzt werden; so wird $m_1 n$ eine unendlich kleine Grösse und ebenso die senkrechte Projektion $m_1 a$ dieses Weges auf die Gerade $m_1 m_2$, welche offenbar mit der Spannungsrichtung der Kraft $[m_1, m_2]$ zusammenfällt. Mithin ist $m_1 a = t$ und

$t = m_1 m_2 - m_2 a = m_1 m_2 - n m_2$, weil die Grössen $m_2 a$ und $n m_2$ nur um eine unendlich kleine Grösse von einander verschieden sind und daher geradezu als gleich angesehen werden dürfen. Nun ist $m_1 m_2$ die Entfernung (m_1, m_2) und $n m_2$ die Entfernung (n, m_2) , welche durch die Aenderung der Lage des Punktes m_1 entstanden ist: mithin ist die Differenz $m_1 m_2 - n m_2$ der Betrag, um welchen sich der erste Abstand, indem er in den zweiten überging, vergrössert oder verkleinert hat und wir haben zufolge der eingeführten Bezeichnung

$$t_2 = \Delta^1(m_1, m_2).$$

Analoge Ausdrücke erhalten wir für $t_3, t_4, \dots$ und indem wir diese in unsere Bedingungsgleichung substituiren, bekommen wir:

$$P_1 p_1 + [m_1, m_2] \Delta^1(m_1, m_2) + [m_1, m_3] \Delta^1(m_1, m_3) + \dots = 0$$

Ganz auf dieselbe Weise erhalten wir als die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der übrigen Punkte $m_2, m_3, \dots$ unseres Systems:

$$P_2 p_2 + [m_2, m_1] \Delta^2(m_2, m_1) + [m_2, m_3] \Delta^2(m_2, m_3) + \dots = 0$$

$$P_3 p_3 + [m_3, m_1] \Delta^3(m_3, m_1) + [m_3, m_2] \Delta^3(m_3, m_2) + \dots = 0$$

Indem wir alle diese Gleichungen zusammenaddiren, bekommen wir in Folge der Relationen

$$[m_2, m_1] = [m_1, m_2]; (m_2, m_1) = (m_1, m_2) \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichung

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \dots + [m_1, m_2] \left\{ \Delta^1(m_1, m_2) + \Delta^2(m_1, m_2) \right\} \\ + [m_1, m_3] \left\{ \Delta^1(m_1, m_3) + \Delta^3(m_1, m_3) \right\} \\ + [m_2, m_3] \left\{ \Delta^2(m_2, m_3) + \Delta^3(m_2, m_3) \right\} \\ + \dots = 0$$

und hier haben wir

$$\Delta^1(m_1, m_2) + \Delta^2(m_1, m_2) = \delta(m_1, m_2),$$

$$\Delta^1(m_1, m_3) + \Delta^3(m_1, m_3) = \delta(m_1, m_3)$$

$$\Delta^2(m_2, m_3) + \Delta^3(m_2, m_3) = \delta(m_2, m_3)$$

so dass wir auch schreiben können

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + P_4 p_4 + \dots \\ + [m_1, m_2] \delta(m_1, m_2) + [m_1, m_3] \delta(m_1, m_3) + [m_2, m_3] \delta(m_2, m_3) + \dots = 0$$

Nun muss das System wegen der festen Verbindung der Punkte, durch deren Inbegriff es gebildet wird, bei eintretender Bewegung das Gleichgewicht in sich bewahren, oder es darf die gegenseitige Lage der einzelnen Punkte sich nicht ändern. Damit keine Aenderung eintrete, müssen die Variationen der einzelnen Entfernungen oder die $\delta(m_1, m_2)$, $\delta(m_1, m_3)$, $\delta(m_2, m_3)$, ... für sich verschwinden und in Folge hiervon verschwindet der zweite aus diesen Deltas bestehende Theil der vorigen Gleichung und wir erhalten

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \dots = 0.$$

Hiermit ist nachgewiesen, dass diese Gleichung eine nothwendige Folge des Gleichgewichtes ist: es ist noch das Umgekehrte darzuthun, dass das Gleichgewicht eine nothwendige Folge von dem Stattfinden der Gleichung ist.

Gesetzt das System wäre nicht im Gleichgewichte, trotzdem dass die Gleichung erfüllt wird; so können wir uns doch in den einzelnen Punkten solche dem Sinne der Bewegung entgegengesetzt gerichtete Kräfte R_1 , R_2 , R_3 , ... angebracht denken, durch deren Wirkung die Bewegung aufgehoben und das System ins Gleichgewicht kommt. Mithin, wenn wir dem Systeme eine unendlich kleine Bewegung ertheilen und die zu den

Kräften R gehörigen Projektionen der virtuellen Geschwindigkeiten mit v bezeichnen, muss als Folge des Gleichgewichtes die Gleichung:

$$0 = \left\{ \begin{aligned} &P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \dots \\ &+ R_1 v_1 + R_2 v_2 + R_3 v_3 + \dots \end{aligned} \right\} = 0$$

erfüllt werden. Der erste Theil dieser Gleichung verschwindet für sich allein nach der Voraussetzung, die wir gemacht haben: es folgt, dass dann auch der zweite für sich allein verschwinden müsse und wir haben:

$$R_1 v_1 + R_2 v_2 + R_3 v_3 + \dots = 0.$$

Nun wirken doch an m_1 die Kräfte P_1 und R_1 und p_1 und v_1 sind die Projektionen der unendlich kleinen Bewegung von m_1 auf den respektiven Richtungen der Kräfte P_1 und R_1 ; ebenso verhält es sich mit den übrigen Punkten. Da nun alle Kräfte R im entgegengesetzten Sinne der Bewegung angebracht sind, so sind alle die Projektionen v nothwendig auf der Verlängerung der Richtungen der P enthalten und demzufolge nach unserem Uebereinkommen an und für sich negativ. Demnach kann die letzte Gleichung nicht anders bestehen, als wenn alle die einzelnen Kräfte $R_1, R_2, R_3, \dots$ für sich Null sind. Es könnte den Anschein haben, als ob einzelne Glieder der genannten Reihe durch die Vorzeichen der R positiv werden könnten. Das geht aber darum nicht, weil die Kräfte R hier gar nicht weder als specifisch positiv, noch als specifisch negativ, sondern lediglich als abstrakte Masszahlen gelten: der Sinn ihrer Richtung kommt in dem Vorzeichen des v zum Ausdruck. Da demnach die letzte Gleichung nicht anders gerettet werden kann, als indem die einzelnen Kräfte $R_1, R_2, \dots$, welche zur Herstellung des Gleichgewichtes hinzugefügt werden müssen, für sich verschwinden: so sind die ersten Kräfte $P_1, P_2, P_3, \dots$ für sich allein zureichend, um das System in Gleichgewicht zu setzen, vorausgesetzt dass sie der Relation

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \dots = 0$$

Genüge leisten. Diese Gleichung ist daher die ebensowohl nothwendige als zureichende Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes.

§. 19.

Wir wollen uns nun aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeit die allgemeinen schon früher gefundenen 6 Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes herleiten:

Denken wir uns irgend einen Punkt m , in welchem eine gewisse Kraft P wirkt und nehmen in der Richtung dieser Kraft einen bestimmten Punkt mit den Coordinaten a, b, c an, während die Coordinaten des Punktes m x, y, z sein mögen: alsdann haben wir für die Distanz v zwischen beiden Punkten:

$$v^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2.$$

Theilen wir nun dem Punkte m eine unendlich kleine Bewegung mit, so kann man die Projektion p dieses Weges auf die Richtung der Kraft P geradezu gleich dv annehmen und dieses vorausgesetzt folgt aus der vorigen Gleichung:

$$p = dv = \frac{x - a}{v} dx + \frac{y - b}{v} dy + \frac{z - c}{v} dz$$

oder, da, wenn die Winkel der Kraft P mit den 3 Axen α, β, γ sind, die Relationen

$$\frac{x - a}{v} = \cos \alpha, \quad \frac{y - b}{v} = \cos \beta, \quad \frac{z - c}{v} = \cos \gamma$$

statt haben,

$$p = \cos \alpha. dx + \cos \beta. dy + \cos \gamma. dz.$$

Diesen Werth setzen wir jetzt in unsere allgemeine Bedingungsgleichung des vorigen Paragraphen ein und erhalten:

$$P_1 (\cos \alpha_1 dx_1 + \cos \beta_1 dy_1 + \cos \gamma_1 dz_1) + P_2 (\cos \alpha_2 dx_2 + \cos \beta_2 dy_2 + \cos \gamma_2 dz_2) + \dots = 0,$$

wo x_1, y_1, z_1 die Coordinaten der einzelnen Punkte bezeichnen, auf welche die Kräfte P wirken. Denken wir uns nun einen ganz beliebigen Punkt des Systemes, dessen Coordinaten x, y, z sein sollen und den wir als neuen Anfangspunkt nehmen, ohne dass die Richtung der 3 Axen sich ändere: alsdann werden die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des ersten Punktes in $x + \xi_1, y + \eta_1, z + \zeta_1$ übergehen und ähnlich wird es sich mit den Coordinaten der übrigen Punkte verhalten, wobei nur noch etwa zu bemerken ist, dass die Coordinaten ξ, η, ζ sich nur auf die gegenseitige Lage der Angriffspunkte beziehen, aber nicht auf die Lage des ganzen Systemes im Allgemeinen. In Folge der angezeigten Substitutionen kommt die letzte Gleichung auf die Form:

$$\left. \begin{aligned} & (P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots) dx + P_1 \cos \alpha_1 d\xi_1 + P_2 \cos \alpha_2 d\xi_2 + \dots \\ & + (P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \dots) dy + P_1 \cos \beta_1 d\eta_1 + P_2 \cos \beta_2 d\eta_2 + \dots \\ & + (P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \dots) dz + P_1 \cos \gamma_1 d\zeta_1 + P_2 \cos \gamma_2 d\zeta_2 + \dots \end{aligned} \right\} = 0.$$

Nun aber ist diese Gleichung eine Bedingung des Gleichgewichts der Punkte des Systems unter einander und also unabhängig von der speciellen Lage des Punktes x, y, z und daher auch von den speciellen Werthen dieser Coordinaten. Demgemäss müssen die Coefficienten der dx, dy, dz einzeln für sich verschwinden, oder es ist

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \dots = 0$$

$$P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + P_3 \cos \beta_3 + \dots = 0$$

$$P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + P_3 \cos \gamma_3 + \dots = 0.$$

Dieses sind die 3 ersten Bedingungsgleichungen, deren Existenz anzeigt, dass das System sich nicht in irgend einer der 3 Axenrichtungen bewegt, und für die geradlinige Bewegung ist es klar, dass, wenn ein System in keiner der 3 Axenrichtungen fortrückt, überhaupt keine fortschiebende Bewegung eintreten kann.

Um zu den 3 letzten Bedingungsgleichungen zu gelangen, welche anzeigen, dass keine Drehung um irgend eine der drei Axen stattfindet, ertheile man dem Systeme zunächst eine Drehung um die Axe der z und betrachte die Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes m im Systeme. Wir erhalten mit Beziehung auf Fig. XXXIV.

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = mn,$$

und durch Differentiation

$$dx = -\sin \varphi d\varphi, \quad dy = \cos \varphi d\varphi, \quad dz = 0.$$

Nun bleibt die Distanz ϱ und ebenso z während der Drehung unveränderlich: indem wir deren Differentiale gleich 0 setzen, erhalten wir

$$dx = -y d\varphi, \quad dy = +x d\varphi, \quad dz = 0$$

als die unendlich kleinen Zuwächse der Coordinaten von m , wenn das System um die Axe der z gedreht wird.

In derselben Manier haben wir in Fig. XXXV.

$$x = \varrho' \sin \omega, \quad z = \varrho' \cos \omega, \quad y = y$$

$$dx = \cos \omega d\varrho' + \varrho' \sin \omega d\omega, \quad dz = -\sin \omega d\varrho' + \varrho' \cos \omega d\omega, \quad dy = dy,$$

und wenn das System um die Axe der y sich dreht, also $d\varrho'$ und dy sich annullirt:

$$dx = +z d\omega, \quad dz = -x d\omega, \quad dy = 0.$$

Endlich für Fig. XXXVI. ist

$$z = \varrho'' \sin \psi, \quad y = \varrho'' \cos \psi, \quad x = x$$

$$dz = \sin \psi d\varrho'' + y d\psi, \quad dy = \cos \psi d\varrho'' - z d\psi, \quad dx = 0,$$

und die Differentiale werden im Falle der Drehung um die Axe der x :

$$dz = y d\psi, \quad dy = -z d\psi, \quad dx = 0.$$

Dieses vorausgesetzt nehmen wir nun unsere allgemeine Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes, nämlich

$$P_1 (\cos \alpha_1 dx_1 + \cos \beta_1 dy_1 + \cos \gamma_1 dz_1) + \\ P_2 (\cos \alpha_2 dx_2 + \cos \beta_2 dy_2 + \cos \gamma_2 dz_2) + \dots = 0$$

wieder auf und suchen ihr die Form zu geben, in welcher sie das Nichtstattfinden einer Drehung um die Axe der z anzeigt. Zu dem Zwecke ertheilen wir dem Systeme eine unendlich kleine Drehung um eben diese Axe und setzen die oben gefundenen dieser Drehung entsprechenden Werthe von dx , dy , dz ein. Dadurch bekommen wir

$$P_1 (-y_1 \cos \alpha_1 + x_1 \cos \beta_1) d\varphi_1 + P_2 (-y_2 \cos \alpha_2 + x_2 \cos \beta_2) d\varphi_2 + \dots = 0.$$

Nun haben wir ein System von unter sich fest verbundenen Punkten: wenn dasselbe um die Axe der z gedreht wird, so müssen alle Punkte eine gleich grosse Drehung erfahren oder die Drehungswinkel φ_1 , φ_2 , φ_3 der einzelnen Punkte sind gleich. Die Differentiale dieser Drehungswinkel gehen also durch Division aus der Gleichung heraus und es wird

$$P_1 (-y_1 \cos \alpha_1 + x_1 \cos \beta_1) + P_2 (-y_2 \cos \alpha_2 + x_2 \cos \beta_2) + \dots = 0$$

die Bedingungsgleichung dafür, dass keine Drehung um die Axe der z statt habe. Aehnlich ergibt sich die Bedingungsgleichung für die Abwesenheit jeder Drehung um die Axe der y , nämlich

$$P_1 (z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1) + P_2 (z_2 \cos \alpha_2 - x_2 \cos \gamma_2) + \dots = 0$$

und die Bedingungsgleichung, welche anzeigt, dass um die Axe der x keine Drehung erfolgt:

$$P_1 (y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1) + P_2 (y_2 \cos \gamma_2 - z_2 \cos \beta_2) + \dots = 0.$$

Man sieht, wie aus der allgemeinen Gleichung zwischen den virtuellen Geschwindigkeiten sich ohne besondere Mühe die 3 Bedingungsgleichungen ergeben, welche die Drehung um irgend eine der 3 Axen negiren. Es ist noch zu zeigen, dass hiermit die Drehung um jede andere Gerade gleichfalls ausgeschlossen ist. Dies geschieht vermöge des Nachweises, dass die Drehung um irgend eine beliebige Gerade immer durch eine

gleichzeitige Drehung um die 3 Axen ersetzt werden kann, und dass umgekehrt die gleichzeitige Drehung um alle 3 Axen mit der Drehung um irgend eine gerade Linie gleichbedeutend ist.

Wenn sich ein Körper zugleich um alle 3 Axen dreht, so werden die Gesamtdifferentiale der Coordinaten eines Punktes m sich aus den Werthen der Einzeldifferentiale zusammensetzen, welche wir oben für die Drehung um jede der 3 Axen aufgestellt haben, und es folgt

$$dx = -y d\varphi + z d\omega,$$

$$dy = x d\varphi - z d\psi,$$

$$dz = -x d\omega + y d\psi,$$

wo φ , ω und ψ die Drehungswinkel in den 3 Coordinatenebenen bezeichnen. Wenn nun die Drehung um alle 3 Axen mit der Drehung um eine einzige Gerade gleich sein soll, so muss es eine Reihe von Punkten im Körper geben, welche dieselbe Stelle behalten, deren Continuität die Drehungsaxe bildet, und für diese Punkte muss $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$ sein, ohne dass die vorhergehenden Gleichungen darum ihre Gültigkeit verlieren. Mithin müssen die 3 Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} -y d\varphi + z d\omega &= 0 \\ x d\varphi - z d\psi &= 0 \\ -x d\omega + y d\psi &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ oder } \left\{ \begin{aligned} -y + z \frac{d\omega}{d\varphi} &= 0 \\ x - z \frac{d\psi}{d\varphi} &= 0 \\ -x + y \frac{d\psi}{d\omega} &= 0 \end{aligned} \right.$$

ohne Widerspruch zusammen bestehen. Dieses ist aber thatsächlich der Fall: denn jede ist eine Folge der beiden anderen. Sie drücken daher eine gerade Linie aus und jede einzelne die Projektion dieser Geraden auf der bezüglichen Coordinatenebene. Mithin giebt es bei der zusammengesetzten Drehung um die 3 Axen zugleich eine Reihe von Punkten, welche auf der bezeichneten unveränderlichen Geraden bleiben. Diese Gerade, um welche der Körper dreht, heisst die momentane Drehungsaxe. Umgekehrt, wenn eine solche Drehungsaxe existirt, so kann diese Drehung immer durch eine Drehung um die 3 Axen zugleich ersetzt werden. Mithin, sobald ein Körper um keine der 3 Axen dreht, so dreht er überhaupt nicht und die drei letzten obigen Bedingungs-gleichungen drücken daher aus, dass unser System von materiellen Punk-

ten in keiner Weise dreht. Zufolge der 3 ersten Bedingungsgleichungen ist auch eine fortschiebende Bewegung unmöglich: demgemäss, da keine andere Bewegung als eine drehende oder eine fortschiebende oder eine aus diesen beiden zusammengesetzte gedacht werden kann, ist das System mit Nothwendigkeit im Gleichgewichte.

§. 20.

Aus dem Vorigen tritt klar hervor, dass das Princip der virtuellen Geschwindigkeit wesentlich auf der Willkürlichkeit der Ver-rückungen beruht, die mit dem Systeme von materiellen Punkten vorgenommen werden. Indem aber diese Willkürlichkeit der einzigen Beschränkung unterworfen bleibt, dass sie den festen Zusammenhalt des Systems in sich nicht aufhebe, so folgen in jedem einzelnen Falle gewisse Bedingungsgleichungen, welche die unveränderliche Natur dieses Zusammenhanges ausdrücken und welche mit der Gleichung zusammen, die sich unmittelbar aus dem Principe her ergiebt, die Bedingungen des Gleichgewichts für den betrachteten speciellen Fall enthalten. Um die Methode auf eine allgemeine Form zu bringen, ist es angemessen, das Princip der virtuellen Geschwindigkeit in der Form sich analytisch auszudrücken, die wir zu Anfang des vorhergehenden Paragraphen hergeleitet haben, nämlich:

$$P_1 (\cos \alpha_1 dx_1 + \cos \beta_1 dy_1 + \cos \gamma_1 dz_1) + P_2 (\cos \alpha_2 dx_2 + \cos \beta_2 dy_2 + \cos \gamma_2 dz_2) + \dots = 0.$$

Nun wollen wir noch, um die vollständige Willkürlichkeit der Ver-rückungen dx , dy , dz schärfer hervorzuheben, uns die letzteren als Variationen denken, so dass wir die vorige Gleichung mit Anwendung des Summenzeichens, wie folgt, umschreiben:

$$(1) \quad \Sigma (P \cos \alpha \delta x + P \cos \beta \delta y + P \cos \gamma \delta z) = 0.$$

Wie nun auch die Punkte unseres Systems mit einander zusammenhängen, immer wird man die Natur des Zusammenhanges durch Gleichungen zwischen den verschiedenen Coordinaten x , y , z der einzelnen Punkte darstellen können, und es mögen dieselben

$$(2) \quad L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = 0, \quad L_4 = 0, \quad \dots$$

sein, wo die linken Seiten im Allgemeinen willkürliche, aber sonst be-

stimmte specielle Funktionen von $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ bezeichnen. Diese Gleichungen müssen für alle möglichen Verrückungen bestehen, weil dieselben den innern Zusammenhang des Systems unverändert lassen. Wir erhalten daher

$$(3) \begin{cases} \frac{dL_1}{dx_1} \delta x_1 + \frac{dL_1}{dy_1} \delta y_1 + \frac{dL_1}{dz_1} \delta z_1 + \frac{dL_1}{dx_2} \delta x_2 + \frac{dL_1}{dy_2} \delta y_2 + \dots = 0 \\ \frac{dL_2}{dx_1} \delta x_1 + \frac{dL_2}{dy_1} \delta y_1 + \frac{dL_2}{dz_1} \delta z_1 + \frac{dL_2}{dx_2} \delta x_2 + \frac{dL_2}{dy_2} \delta y_2 + \dots = 0 \end{cases}$$

Aus dem Gleichungssystem (3) wird man in jedem Falle so viele der Grössen $\delta x, \delta y, \delta z$ vermöge der übrigen ausdrücken können, als die Anzahl der Gleichungen ausmacht und nachdem diese Ausdrücke in (1) substituirt sind, werden darin nur noch solche Variationen $\delta x, \delta y, \delta z$ vorkommen, die von der speciellen Natur des Systems vollkommen unabhängig sind; mithin bei der unbeschränkten Willkürlichkeit der letztern ist die allgemeine Gültigkeit der Gleichung nicht anders zu retten, als indem man die einzelnen Coëfficienten der übrig gebliebenen $\delta x, \delta y, \delta z$ gleich 0 setzt. Hierdurch erhält man eine Anzahl von Gleichungen, welche die Bedingungen ausdrücken, damit das durch die Gleichungen (2) gegebene System materieller Punkte im Gleichgewicht sei, und diese beiden Gruppen von Gleichungen bilden die Grundlage für die Behandlung aller Aufgaben, die mit dem Gleichgewichte des Körpers im Zusammenhange stehen.

Um an einem speciellen Beispiele die Anwendung zu veranschaulichen, wollen wir uns die folgende Aufgabe stellen:

Ein unbiegsamer Stab (den wir um grösserer Einfachheit willen als gewichtlos voraussetzen) möge (Fig. XXXVII.) in dem festen Punkte B dergestalt aufliegen, dass er sich in vertikaler Ebene beliebig verschieben lasse, dagegen nicht zur Seite ausweichen könne; der Endpunkt A stütze sich gegen die feste Ebene AO , und in constanter Entfernung $AG = a$ vom Endpunkte möge die vertikale Kraft P angreifen. Es soll die Gleichgewichtslage des Stabes bestimmt werden.

Die Horizontale BO , deren Länge l gegeben sei, möge zur Axe der x genommen werden und die Vertikale durch den Punkt O zur Axe

der y . Da der Stab durch keine Kraft aus der Ebene AOB herausgezogen wird, so ist das angenommene ebene Coordinatensystem zur Bestimmung der gesuchten Grössen vollkommen ausreichend. Die Gleichung der Geraden AO , auf welche sich der Stab stützt, wird alsdann von der Form $y = x \operatorname{tg} \alpha$ sein, wo wir unter y und x geradezu die Coordinaten des speciellen Punktes A und unter α den Winkel der AO mit der Axe der x verstehen können; ferner wollen wir die Coordinaten des Punktes G mit y_1 , x_1 bezeichnen, und bemerken, dass die Ordinate des Punktes B gleich 0, seine Abscisse gleich l ist. Nun ist das System der materiellen Punkte, für welches die Bedingungen des Gleichgewichts aufgestellt werden sollen, auf dem Stabe AGB enthalten, und zwar greifen 3 Kräfte an dasselbe an, nämlich in G die Vertikalkraft P , in A und in B respektive senkrecht auf AO und AB die Widerstandskräfte W und Q , welche von der Bedingung, dass die Gerade AO und der Punkt B fest sind, her-rühren. Die Winkel, welche die Kraft W mit den Axen der x , y einschliesst, sind respektive $\alpha - \frac{\pi}{2}$ und $\pi - \alpha$ und die Winkel, welche die Kraft Q mit eben diesen Axen einschliesst, sind, wenn wir den Winkel des Stabes AB mit einer Horizontalen gleich φ annehmen, respektive $\varphi - \frac{\pi}{2}$ und $\pi - \varphi$. Unsere allgemeine Gleichung (1) zwischen den virtuellen Geschwindigkeiten giebt demgemäss, da die Glieder mit z ohne Weiteres wegfallen:

$$W \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \delta x + W \cos (\pi - \alpha) \delta y + P \delta y_1 + Q \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \delta l + Q \cos (\pi - \varphi) \delta o = 0$$

oder einfacher

$$W \sin \alpha \delta x - W \cos \alpha \delta y + P \delta y_1 + Q \sin \varphi \delta l - Q \cos \varphi \delta o = 0,$$

wo δl und δo die Projektionen der unendlich kleinen Verrückung des Stabpunktes B auf die Axen der x und y ausdrücken.

Der Bedingungen, welche das Gesetz des Zusammenhanges zwischen den 3 Punkten unseres Stabes betreffen, sind drei: einmal der Punkt A muss beständig auf AO bleiben, so dass beständig die Gleichung

$$y = x \operatorname{tg} \alpha$$

bestehen muss, ferner AG muss immer gleich a bleiben, oder es ist
 $y_1 - y = a \sin \varphi$, $x_1 - x = a \cos \varphi$,
 endlich der Punkt des Stabes, welcher während der Gleichgewichtslage
 auf B ruht, muss bei jeder möglichen Bewegung, die man dem Systeme
 ertheilt, immer wieder in die Stabrichtung hineinfallen, d. h. in gerader
 Linie mit den beiden Punkten A und G bleiben. Für die specielle Lage
 in B muss daher der Gleichung

$$o - y = \operatorname{tg} \varphi (l - x)$$

Genüge geschehen. Diese 4 Gleichungen entsprechen dem Gleichungs-
 systeme (2) und ihre Variation giebt das Gleichungssystem (3), nämlich

$$\begin{aligned} \delta y &= \delta x \operatorname{tg} \alpha, \\ \delta y_1 - \delta y &= a \cos \varphi \delta \varphi, \quad \delta x_1 - \delta x = -a \sin \varphi \delta \varphi, \\ \delta o - \delta y &= \operatorname{tg} \varphi (\delta l - \delta x) + \frac{\delta \varphi}{\cos^2 \varphi} (l - x). \end{aligned}$$

Hieraus entwickeln wir uns δy , δy_1 , δx_1 und δo und durch die Sub-
 stitution dieser Werthe in die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten
 folgt nun

$$\left. \begin{aligned} W \sin \alpha \delta x - W \cos \alpha \delta x \operatorname{tg} \alpha + P (\delta x \operatorname{tg} \alpha + a \cos \varphi \delta \varphi) + Q \sin \varphi \delta l \\ - Q \cos \varphi (\delta x \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi (\delta l - \delta x) + \frac{\delta \varphi}{\cos^2 \varphi} (l - x)) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Bei näherer Betrachtung zeigt es sich, dass die Glieder, welche W und
 δl enthalten, sich gegenseitig vernichten, so dass wir einfacher

$$(P \operatorname{tg} \alpha - Q \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha + Q \sin \varphi) \delta x + \left(a P \cos \varphi - Q \frac{l - x}{\cos \varphi} \right) \delta \varphi = 0$$

schreiben können. Bei der vollkommenen Willkürlichkeit der δx und $\delta \varphi$
 kann diese Gleichung nicht anders bestehen, als indem gleichzeitig

$$P \operatorname{tg} \alpha - Q \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha + Q \sin \varphi = 0$$

$$a P \cos \varphi - Q \frac{l - x}{\cos \varphi} = 0$$

ist, und die Elimination der Q aus diesen beiden Gleichungen giebt:

$$(x - l) \sin \alpha = a \cos^2 \varphi \sin (\varphi - \alpha).$$

Diese Gleichung muss mit den 4 Gleichungen, welche die gegenseitige
 Lage der 3 Punkte A , G , B bestimmen, zusammen statthaben. Eliminiren
 wir aus ihr und den beiden Gleichungen

$$y = x \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad -y = \operatorname{tg} \varphi (l - x)$$

die beiden Grössen x und y , so resultirt die Gleichung

$$a \cos \varphi \sin^2 (\varphi - \alpha) = l \sin^2 \alpha,$$

welche die Bestimmung des Neigungswinkels φ enthält. Nachdem φ bekannt ist, hält es nicht schwer, zur Bestimmung der Coordinaten y , x , y_1 , x_1 , sowie, da P gleichfalls eine gegebene Grösse ist, der Widerstandskraft Q zu gelangen. Was die Bestimmung des Widerstandes W anbetrifft, so geschieht sie am einfachsten in Folge der Bemerkung, dass die Summe von den Componenten der 3 Kräfte P , Q , W in der Richtung jeder der beiden Axen gleich 0 sein muss, oder wenn wir sie gleichfalls aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten herleiten wollen, so betrachte man unsere allgemeine Gleichung für den Fall einer blos horizontalen Verschiebung, für welche sie sich auf die einfachere

$$W \sin \alpha \delta x + Q \sin \varphi \delta l = 0$$

reducirt. Die Variationen δx und δl sind hierin gleich, wie ein Blick auf die Figur uns zeigt, und fallen mithin durch Division heraus, vermöge deren wir

$$W \sin \alpha + Q \sin \varphi = 0$$

erhalten. Diese Gleichung reicht zur Bestimmung von W aus und drückt im Uebrigen weiter nichts aus, als dass die Summe der Componenten in der Axe der x sich annullirt.

In dem speciellen Falle $\alpha = \frac{\pi}{2}$, wo die Stützebene AO vertikal ist, gestaltet sich die wirkliche Berechnung ziemlich einfach: es wird nämlich

$$\cos \varphi = \sqrt[3]{\frac{l}{a}}.$$

Druckfehler.

S. 65. Z. 2. lies: $\angle UB_1L = 90^\circ - CB_1H = B_1CH$, also $\cos UB_1L = \cos B_1CH = \frac{p_1}{CB_1}$,

S. 103. Z. 10. lies: $\zeta = (e + \xi^1) \cos \alpha + \xi^1 \sin \alpha$.

die beiden Grössen x und y , so resultirt die Gleichung

$$a \cos \varphi \sin^2 (\varphi - \alpha) = l \sin^2 \alpha,$$

welche die Bestimmung des Neigungswinkels φ enthält. Nachdem φ bekannt ist, läßt es nicht schwer, zur Bestimmung der Coordinaten y , x , y_1 , x_1 , sowie, da P gleichfalls eine gegebene Grösse ist, der Widerstandskraft Q zu gelangen. Was die Bestimmung des Widerstandes W anbetrifft, so geschieht sie am einfachsten in Folge der Bemerkung, dass die Summe von den Componenten der 3 Kräfte P , Q , W in der Richtung jeder der beiden Axen gleich 0 sein muss, oder wenn wir sie gleichfalls aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten herleiten wollen, so betrachte man unsere allgemeine Gleichung für den Fall einer bloss horizontalen Verschiebung, für welche sie sich auf die einfachere

$$(x-1) W \sin \alpha \cos \alpha + Q \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

reducirt. Die Variationen δx und δy sind hierin gleich, wie ein Blick auf die Figur uns zeigt, und fallen mithin durch Division heraus, vermöge deren wir

$$W \sin \alpha + Q \sin \varphi = 0$$

erhalten. Diese Gleichung reicht zur Bestimmung von W aus und drückt im Uebrigen weiter nichts aus, als dass die Summe der Componenten in der Axe der x sich annullirt.

In dem speciellen Falle $\alpha = \frac{\pi}{2}$, wo die Stütze AO vertikal ist, gestaltet sich die wirkliche Berechnung ziemlich einfach; es wird nämlich

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{l}{a}}$$

$$0 = \varphi \sin Q + a \sin \varphi \cos Q - a \sin P$$

$$0 = \frac{a \sin \varphi \cos Q - a \sin P}{\cos \varphi}$$

Druckfehler.

$$2. 65. X. 2. \text{ lies: } < \angle UB_1L = 90^\circ - \angle CB_1H = \angle B_1CH, \text{ also } \cos UB_1L = \cos B_1CH = \frac{B_1L}{CB_1}$$

$$2. 103. X. 10. \text{ lies: } \hat{c} = (c + \hat{c}') \cos \alpha + \hat{c}' \sin \alpha, \text{ addirt nach dem 1ten zur 2ten}$$

$$(x-1) \varphi \sin \alpha = y - \text{ das 2te } = y$$

Fig. VII

Fig. VI

Fig. V

Fig. IV

Fig. III

Fig. II

Fig. I

Fig. I

Fig. XII

Fig. XI

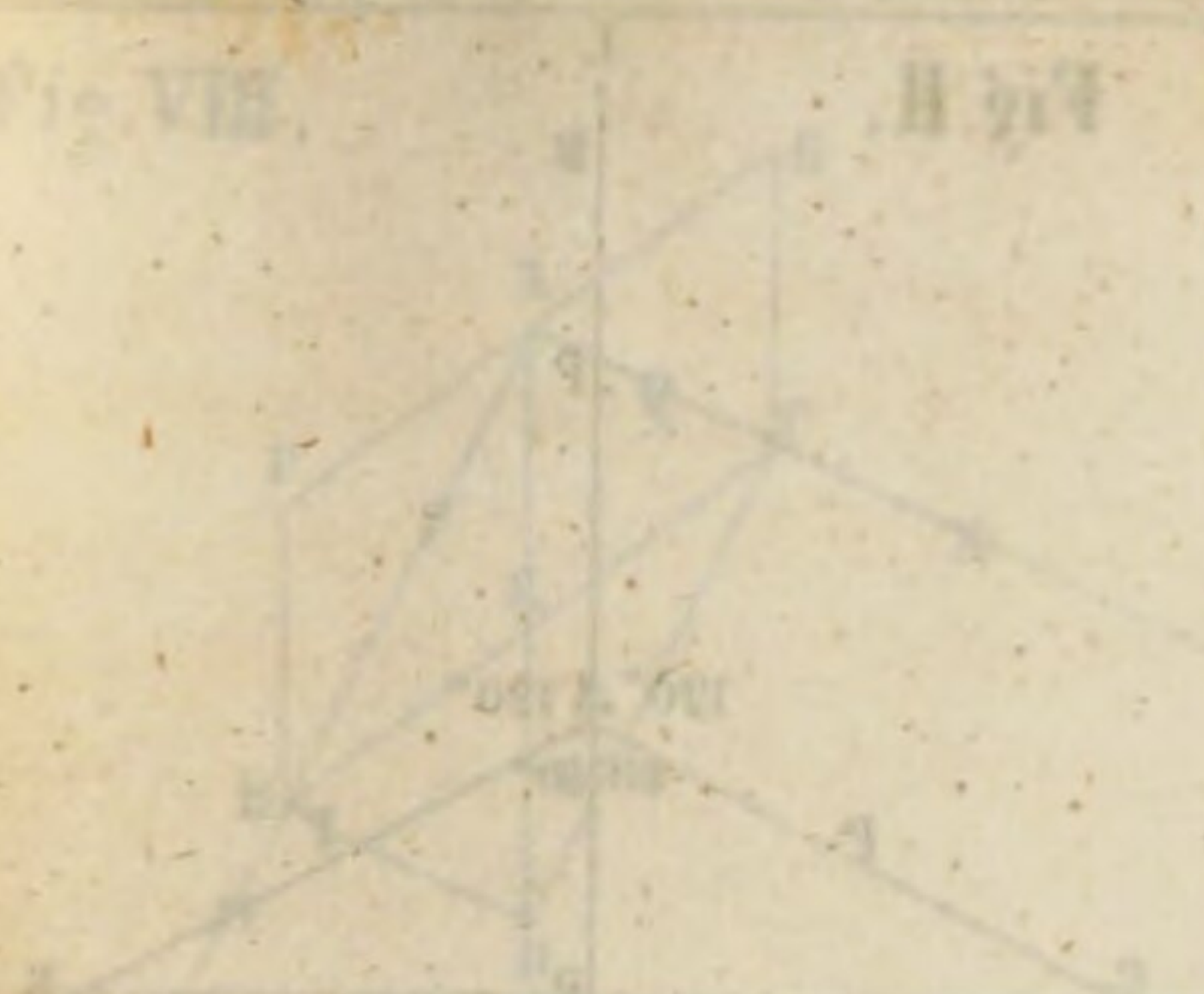
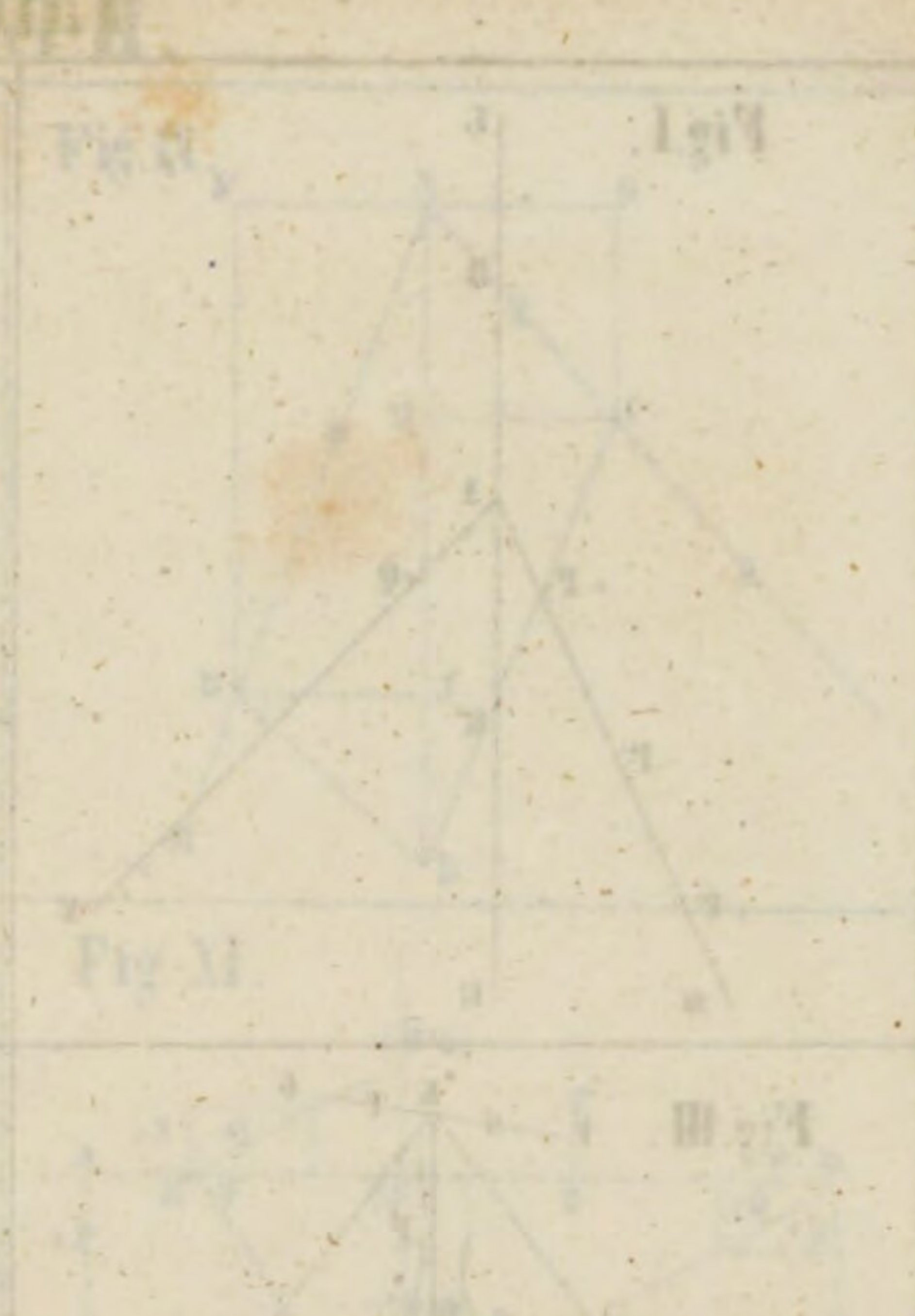
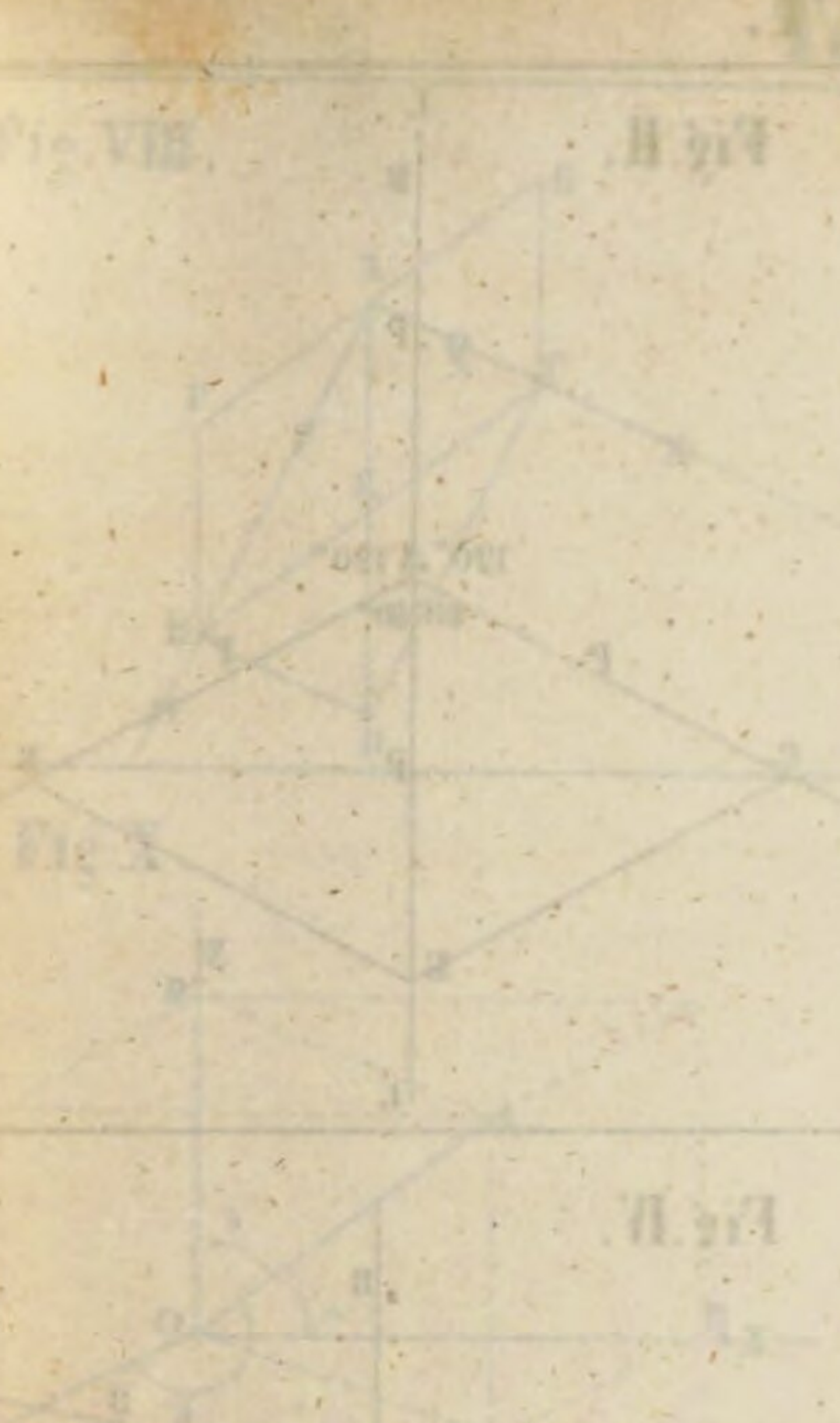
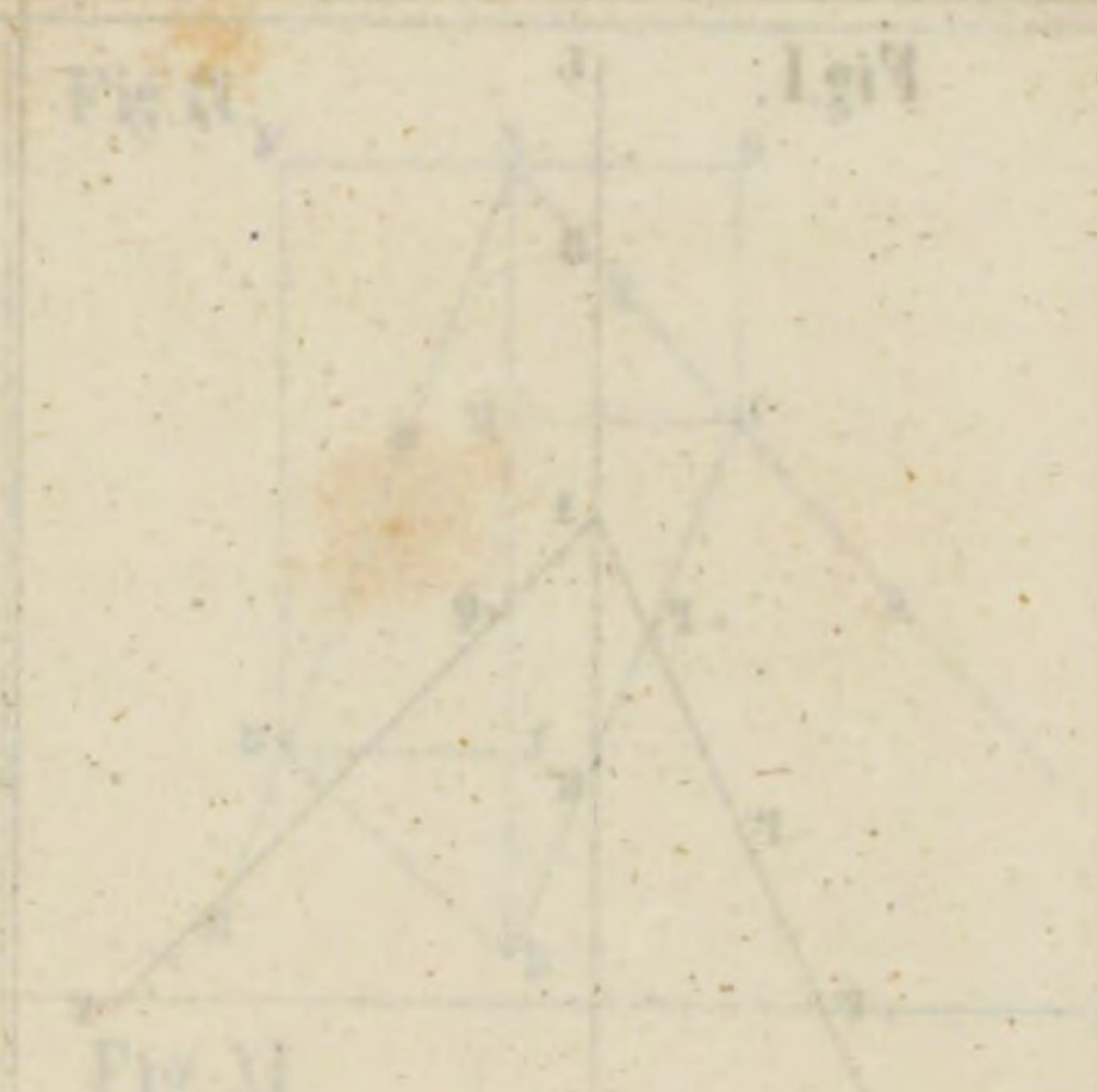
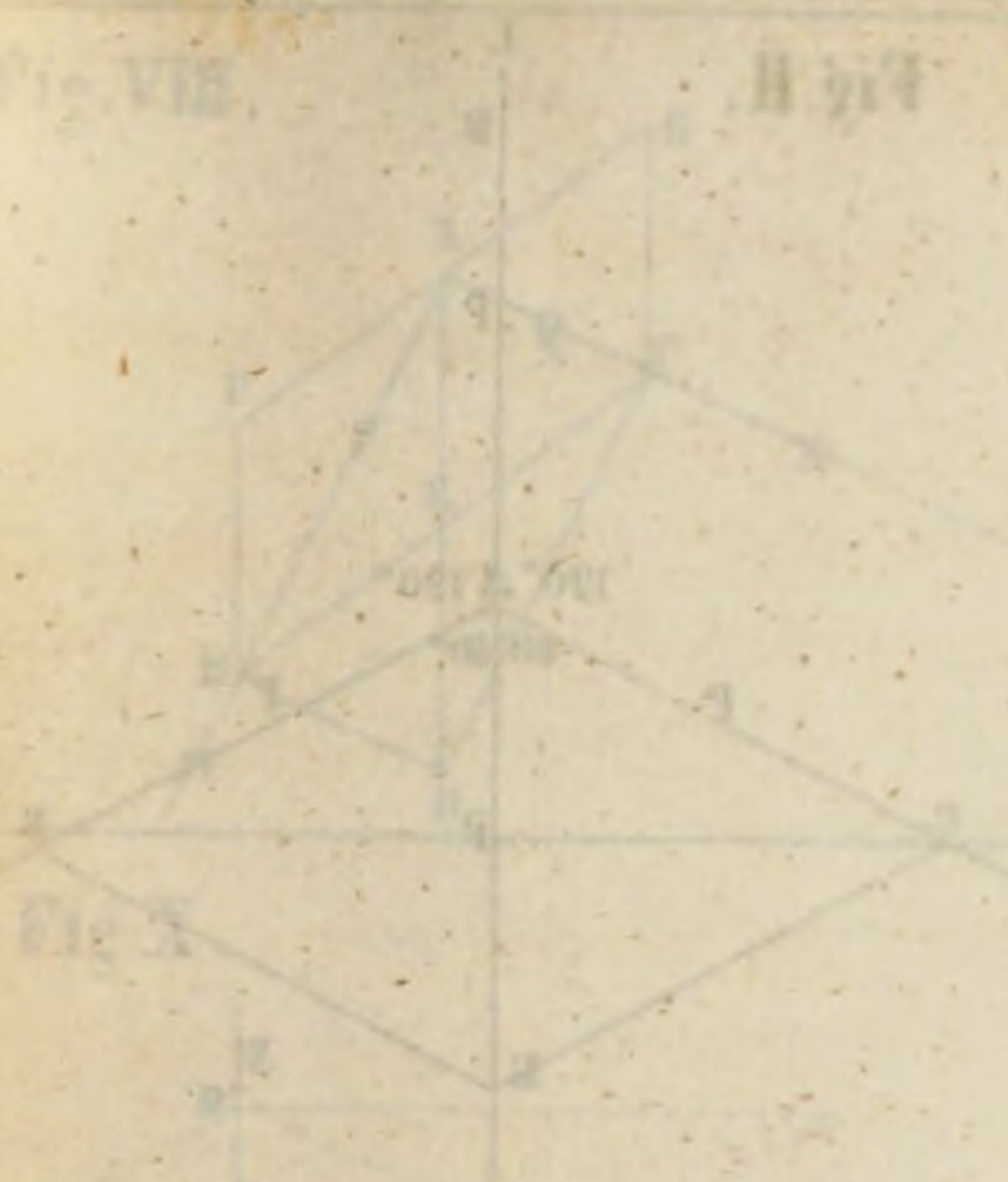
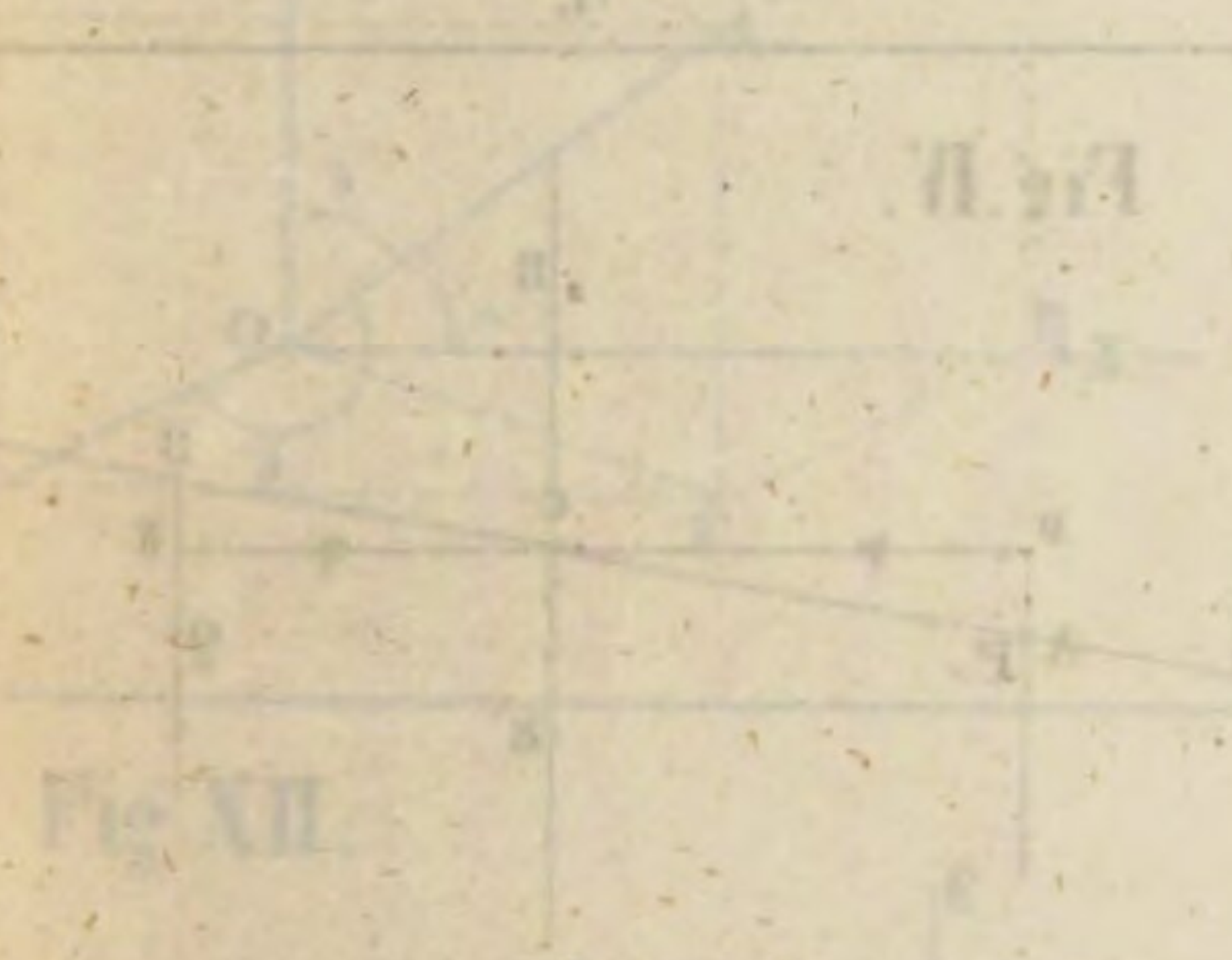
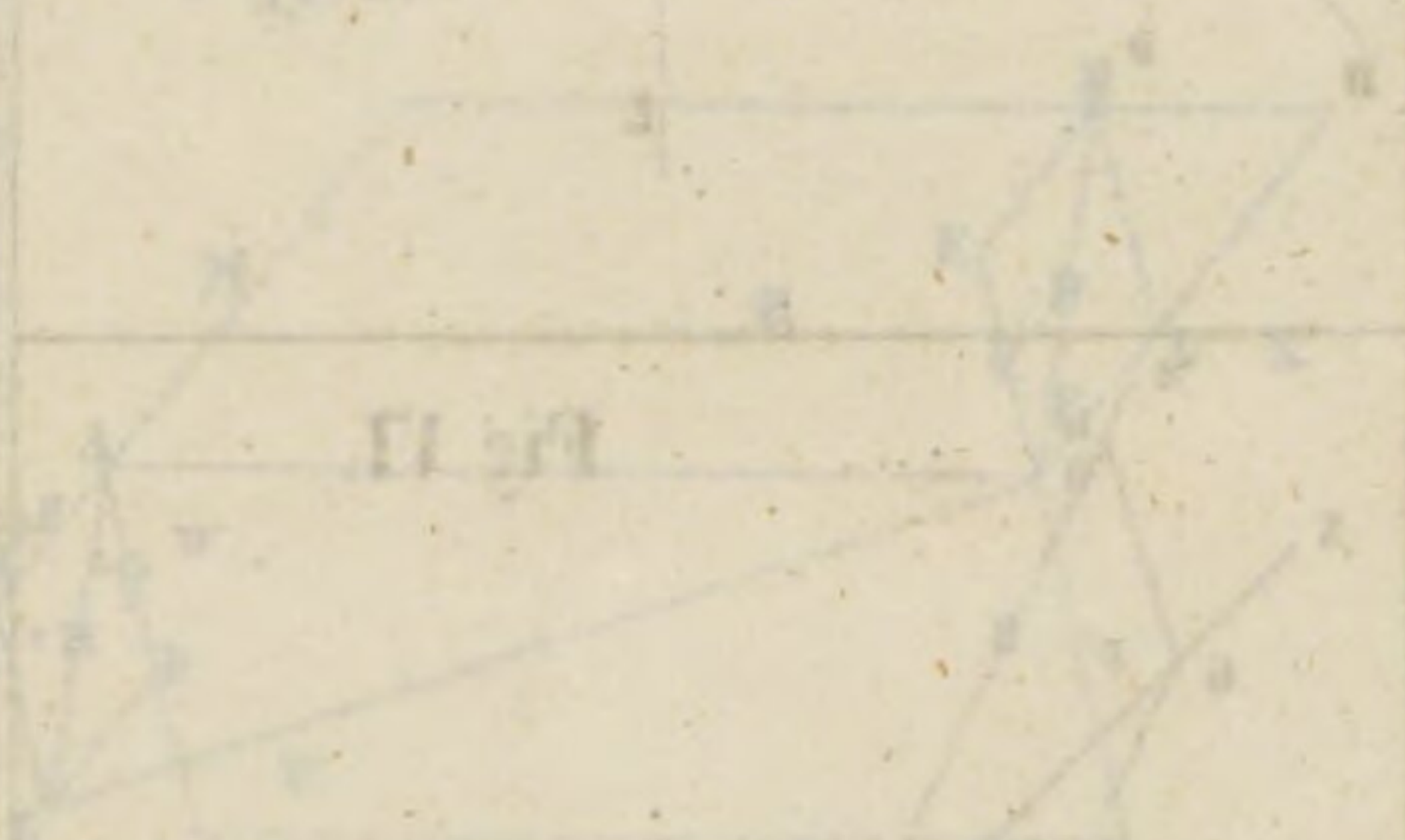
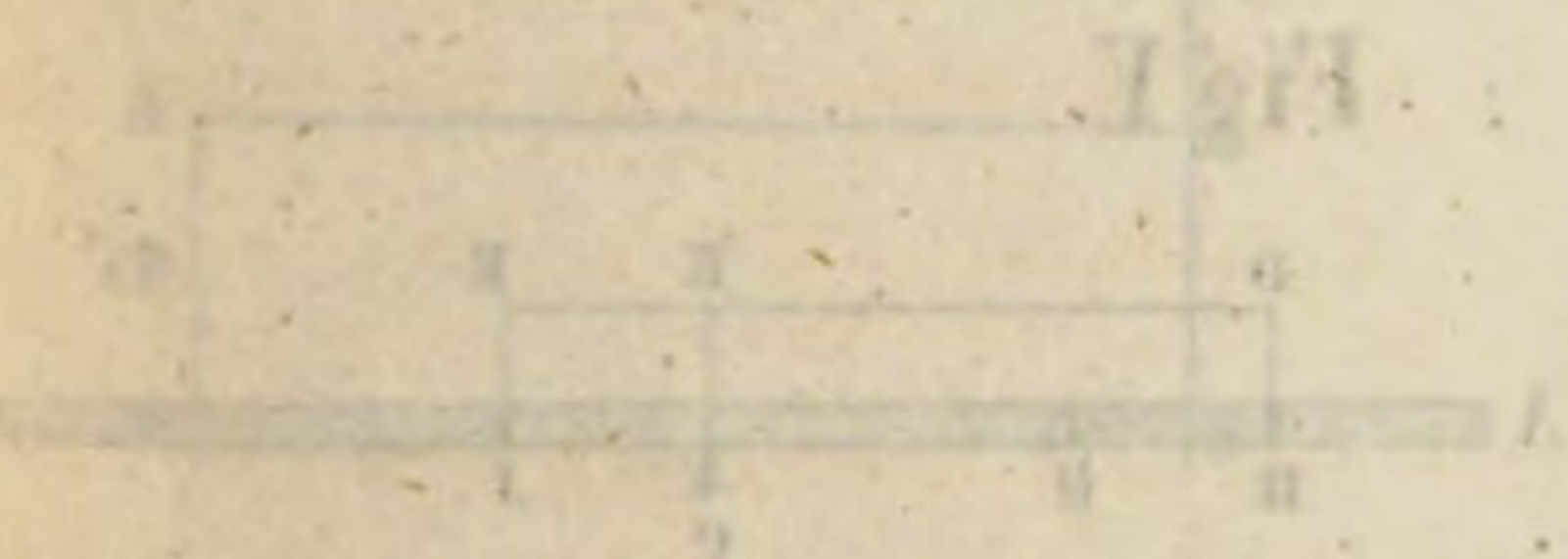
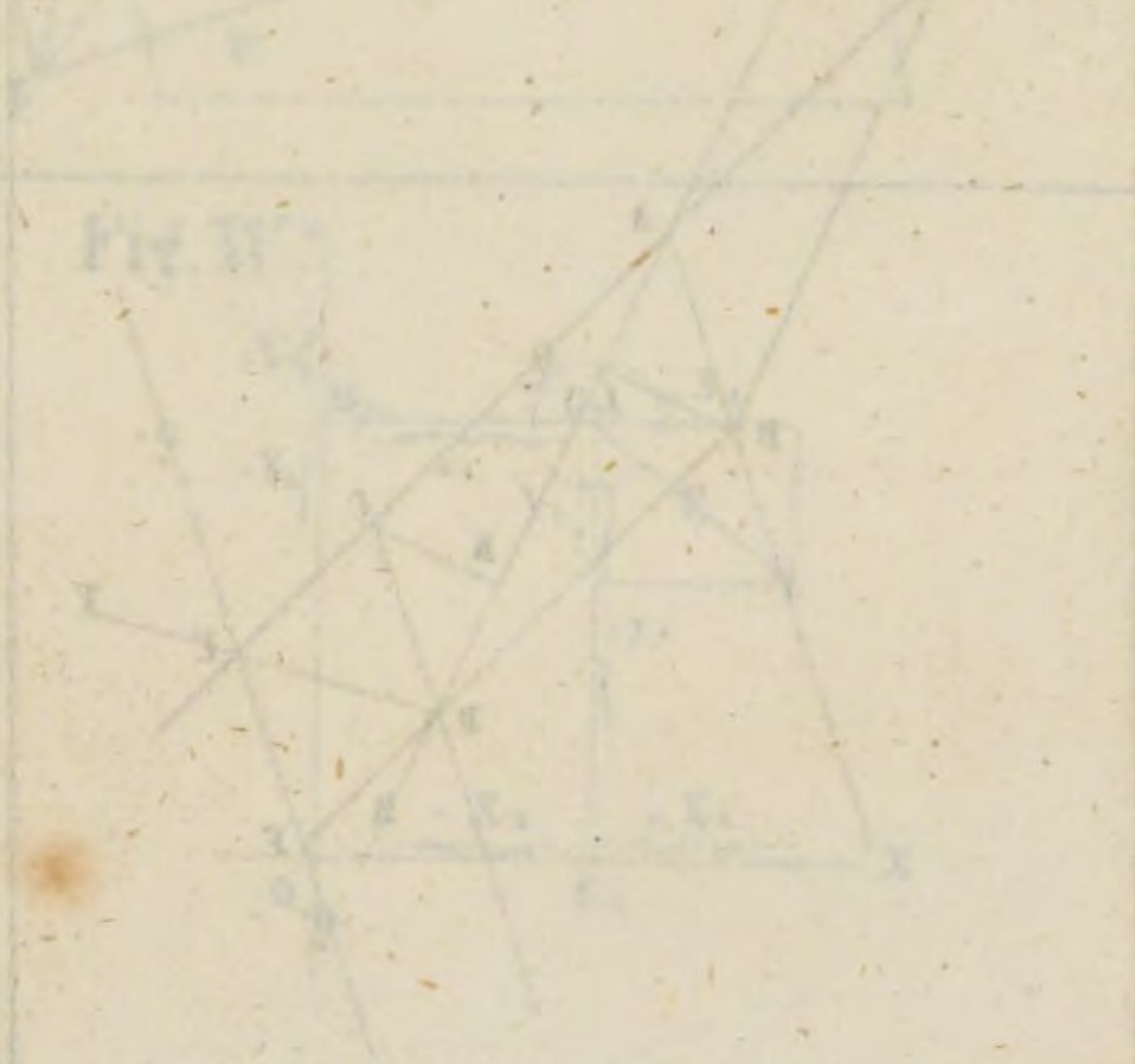
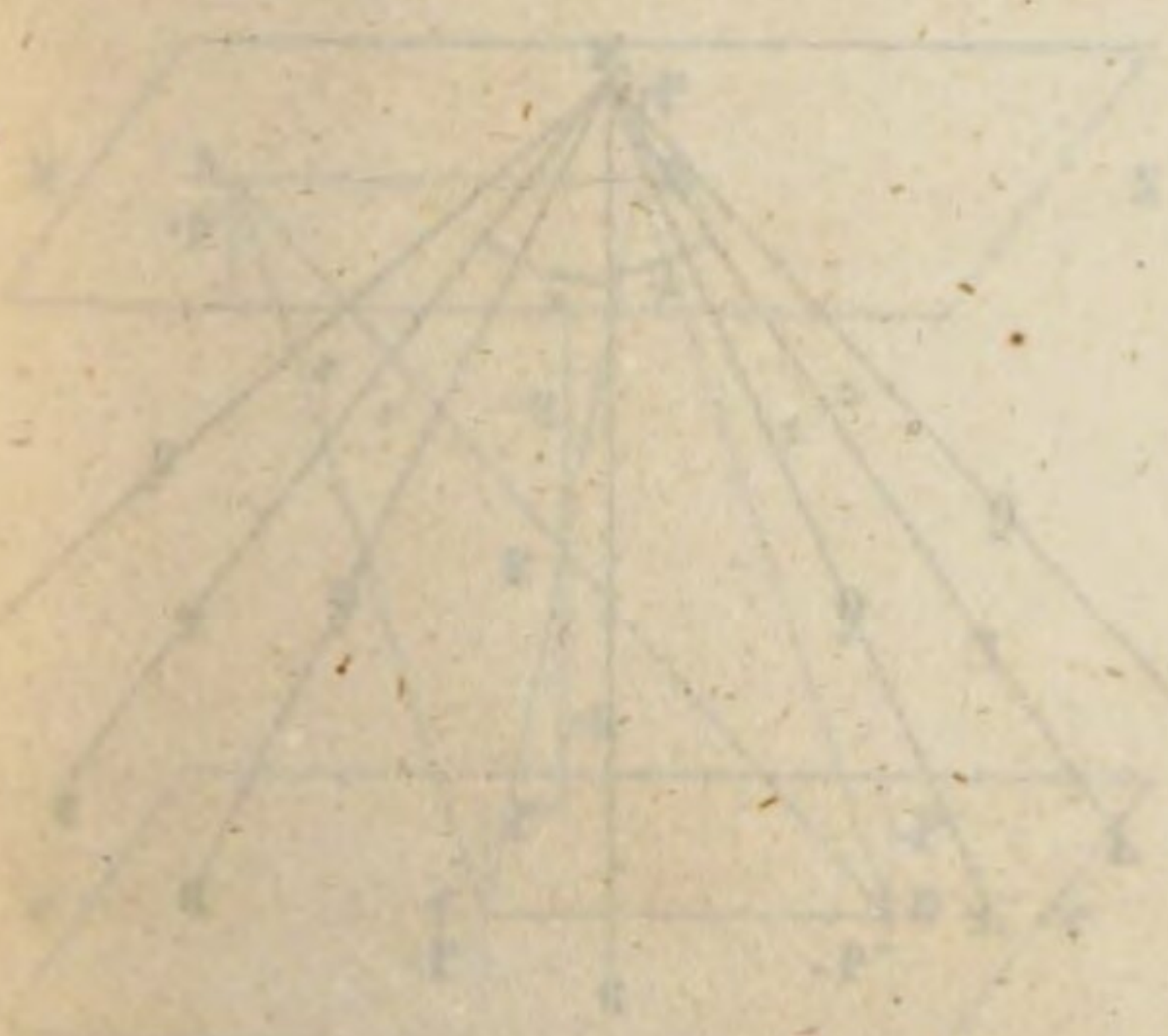
Fig. X

Fig. IX

Fig. XIII

Fig. VIII

Fig. VII



Tafel I.

Fig. I.

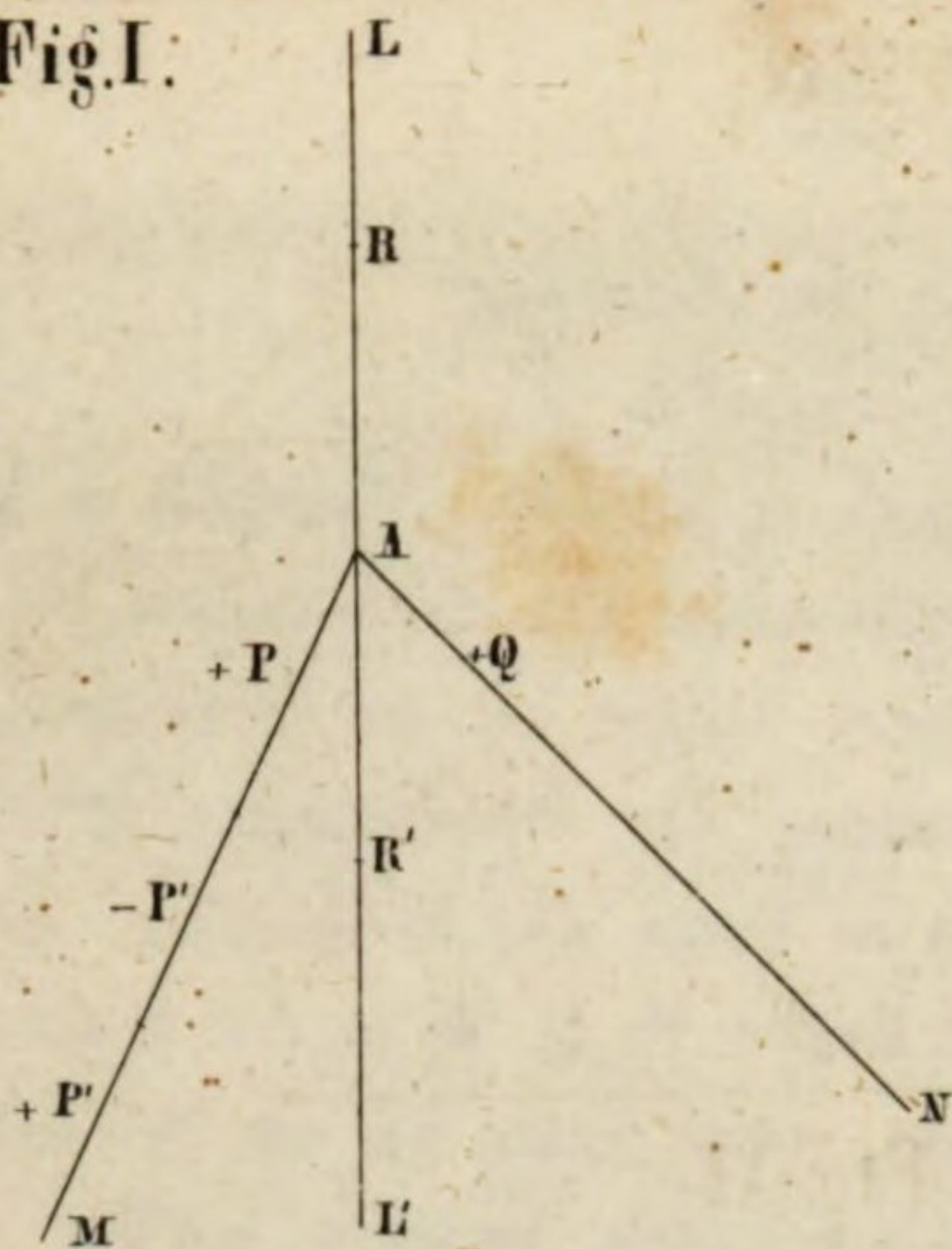


Fig. II.

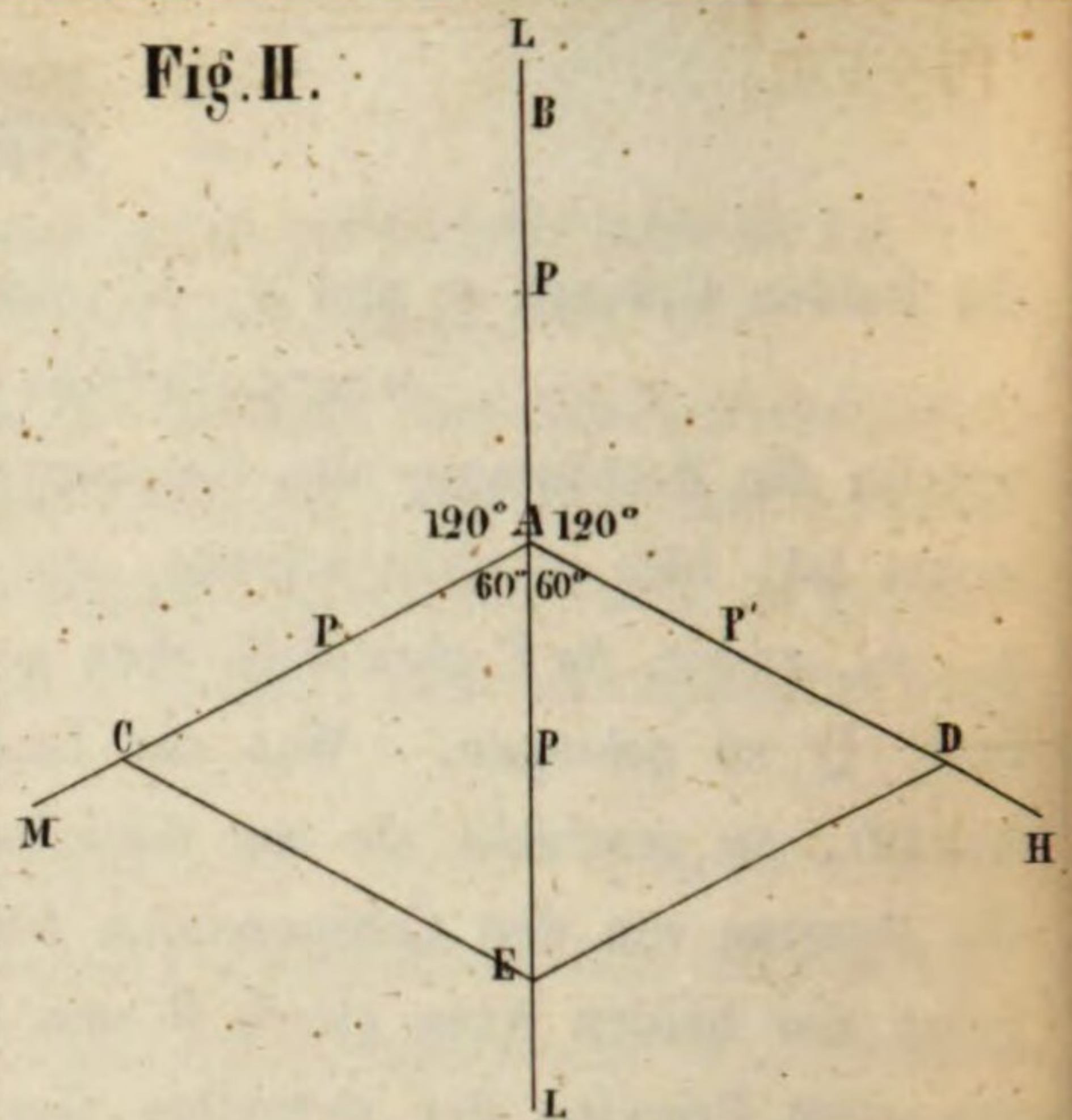


Fig. III.

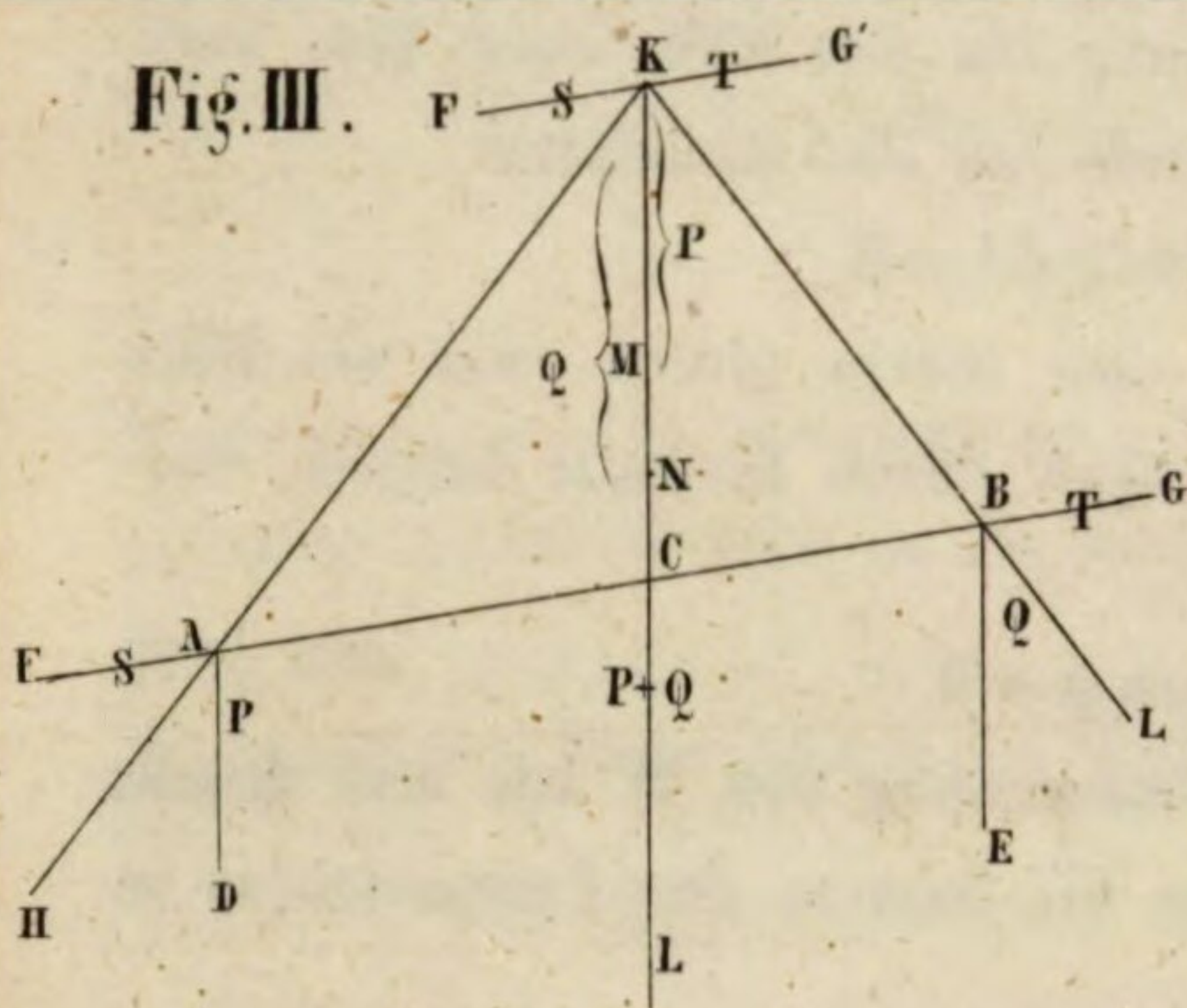


Fig. IV.

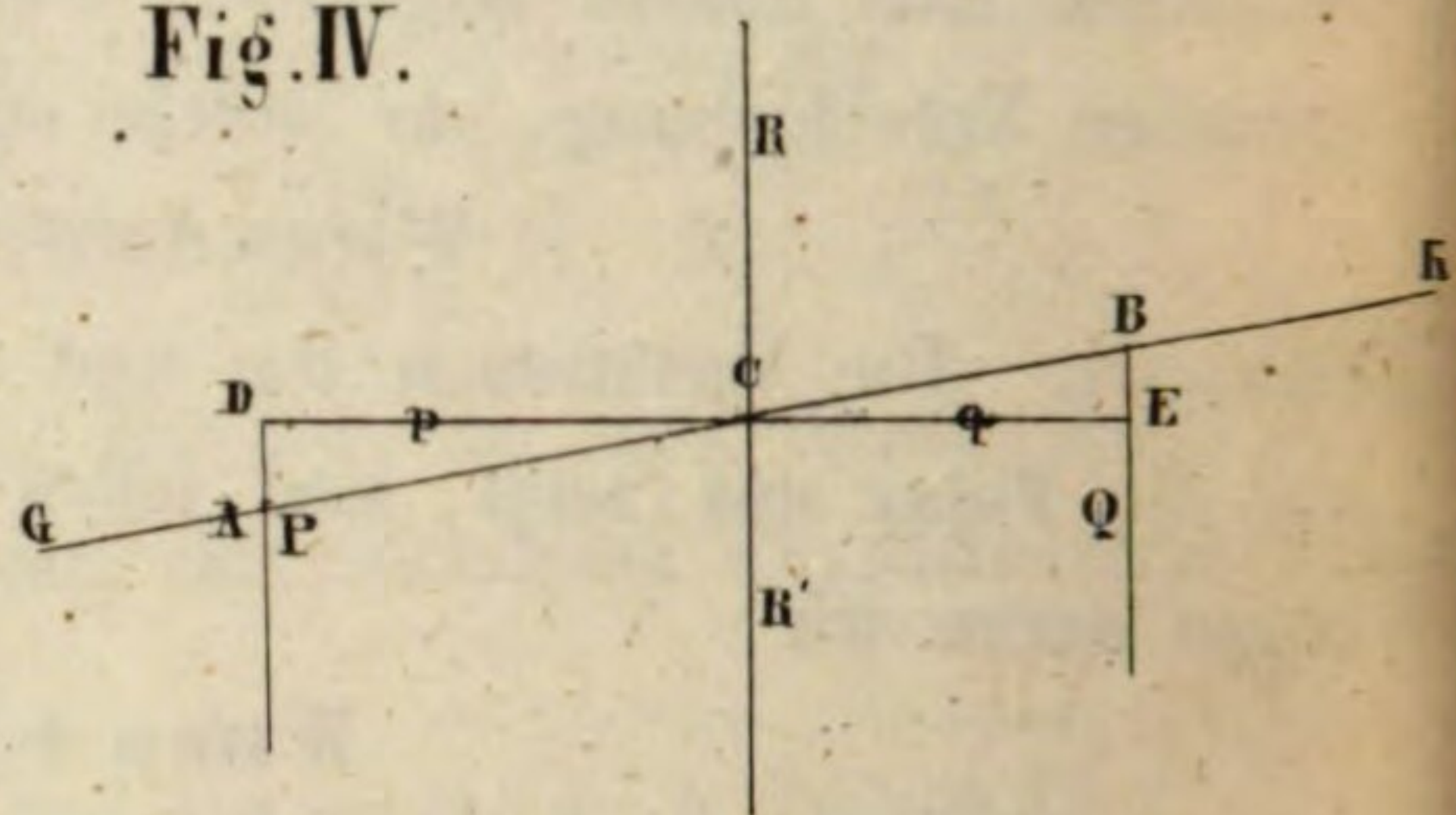


Fig. V.

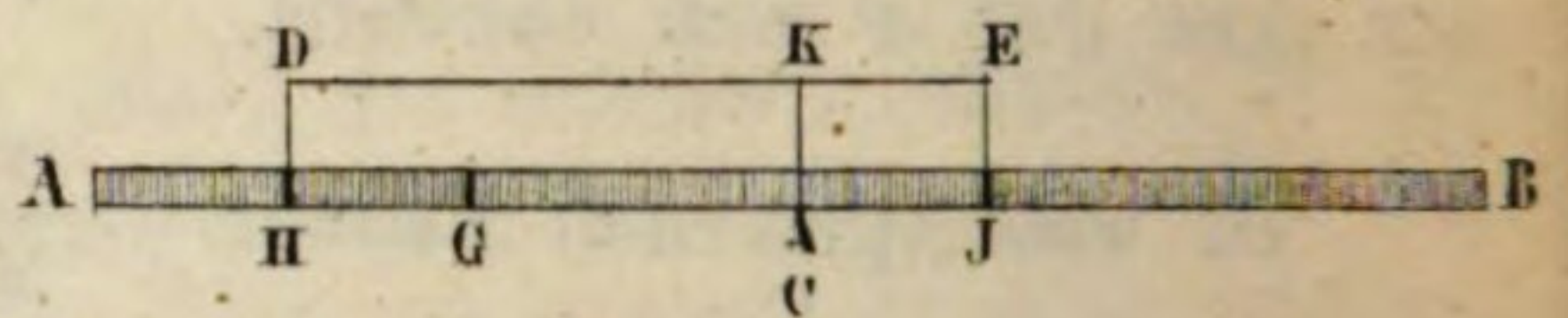


Fig. VI.

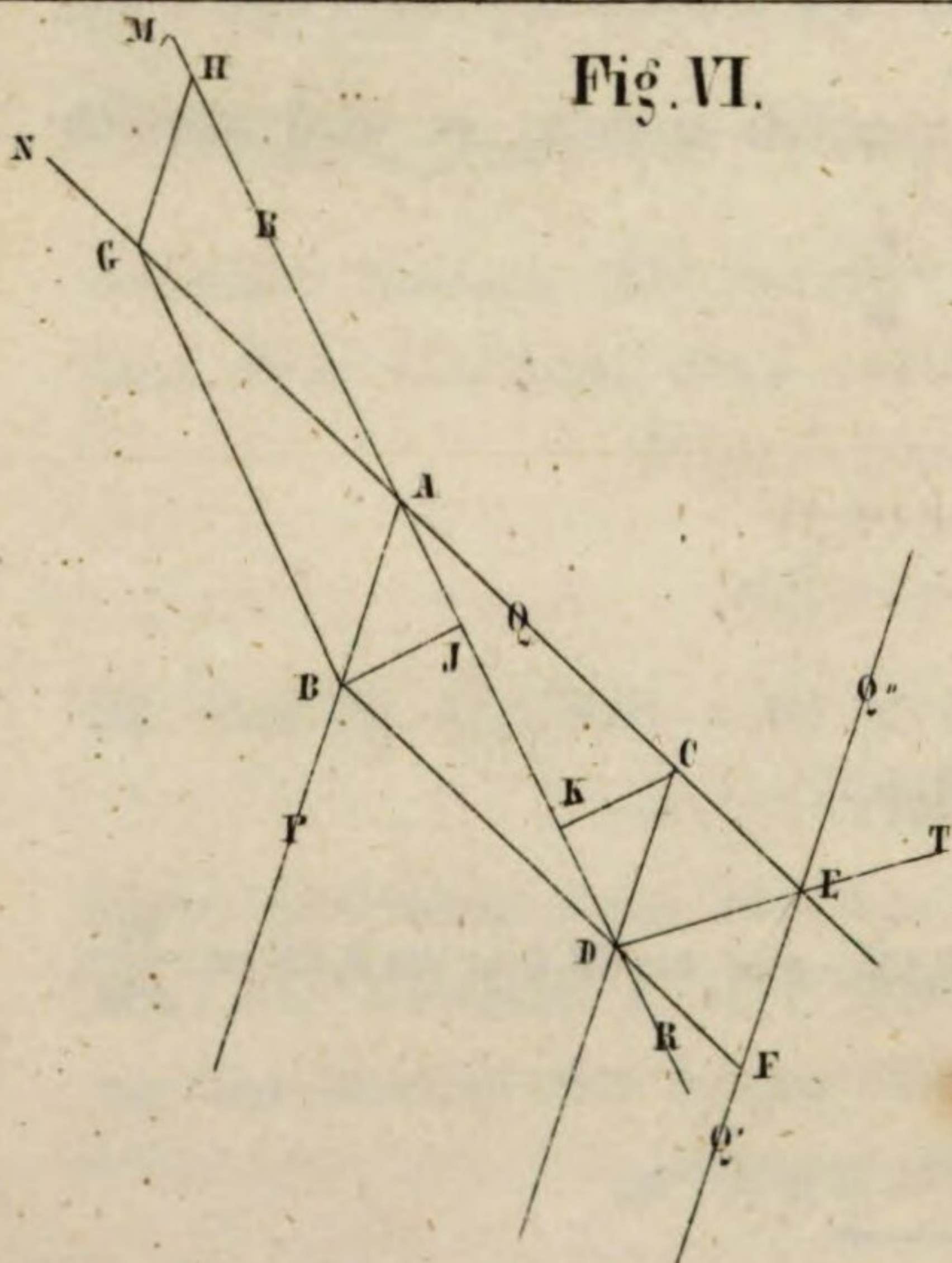
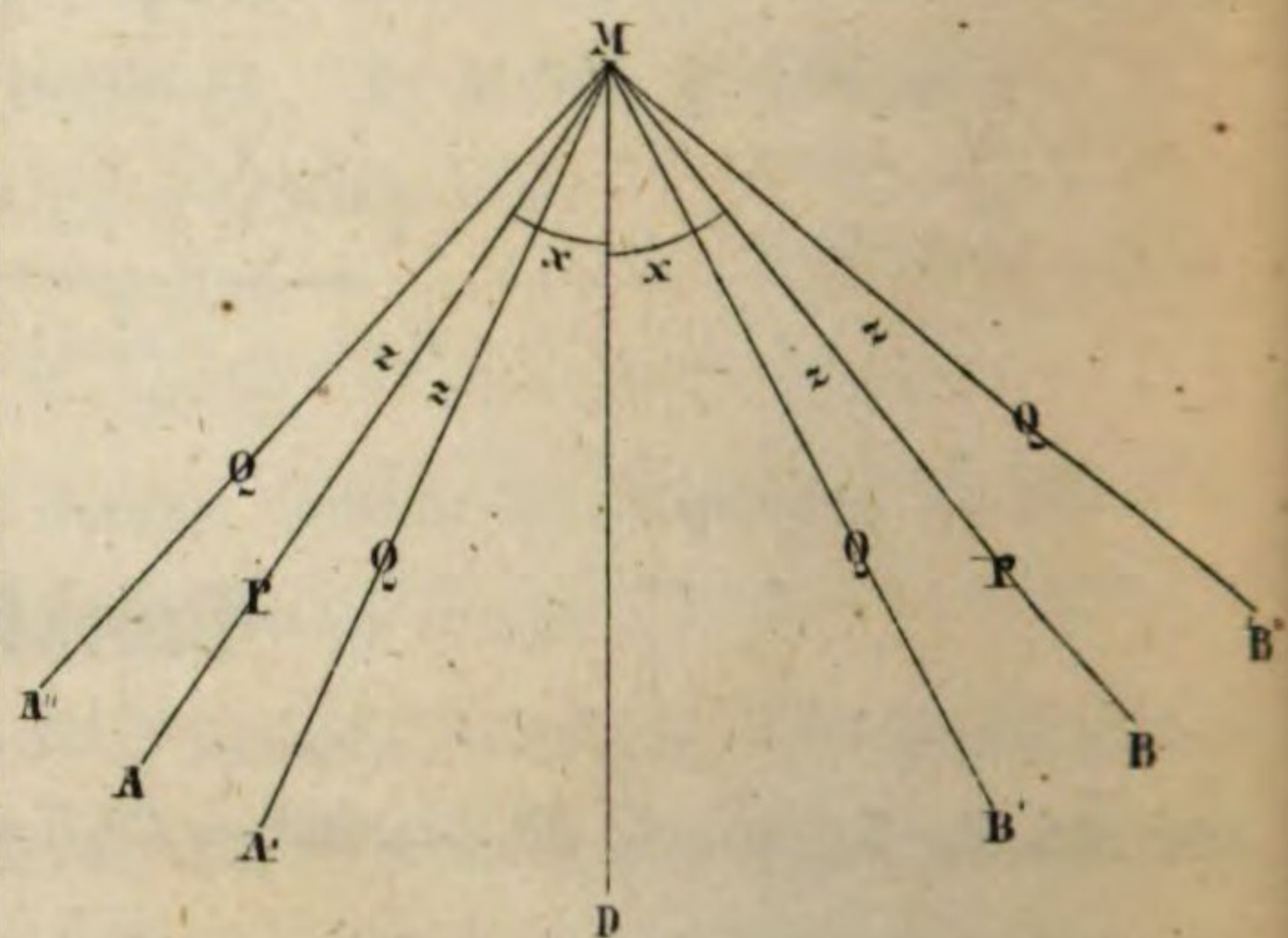


Fig. VII.



Tafel II.

Fig. VIII.

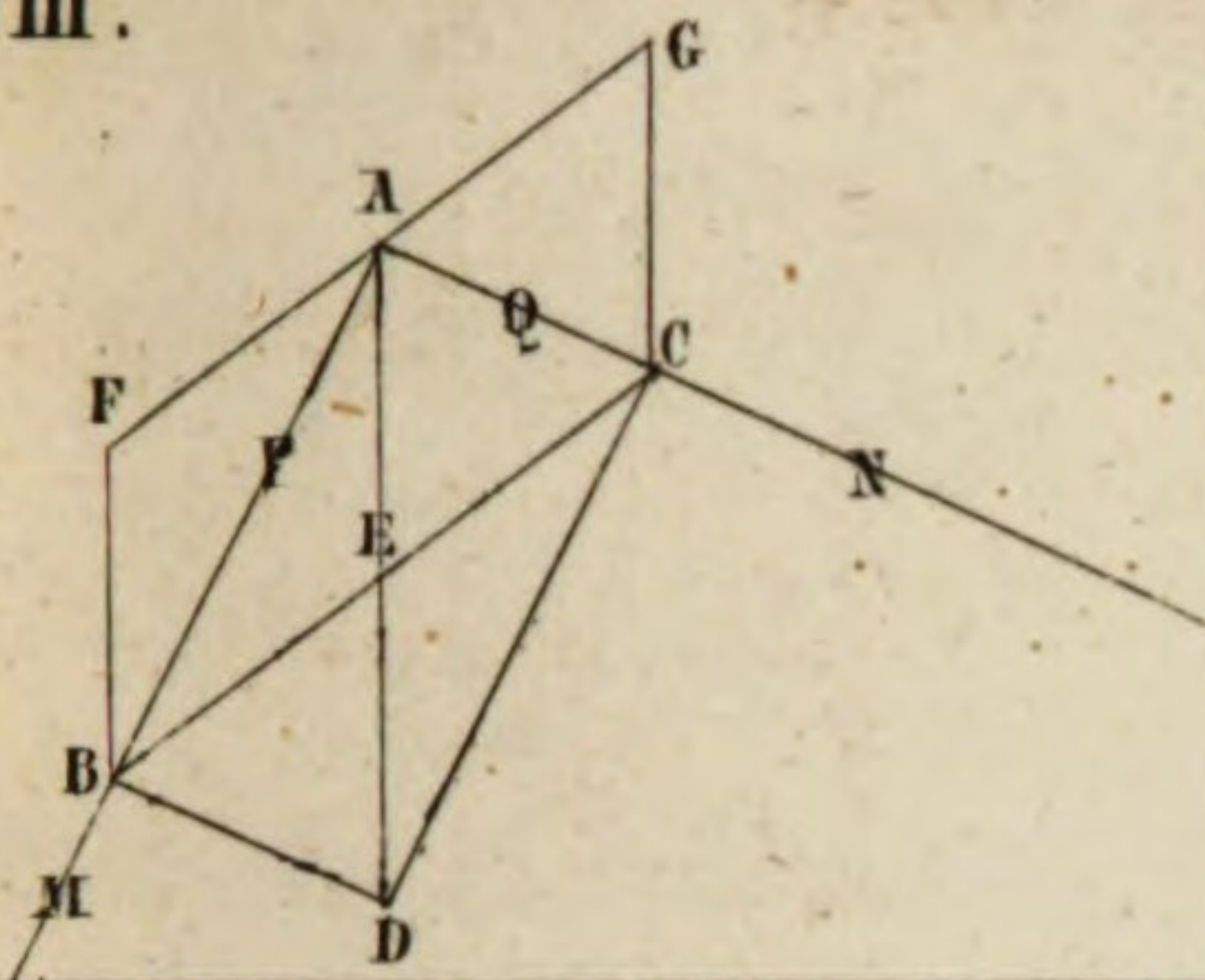


Fig. IX.

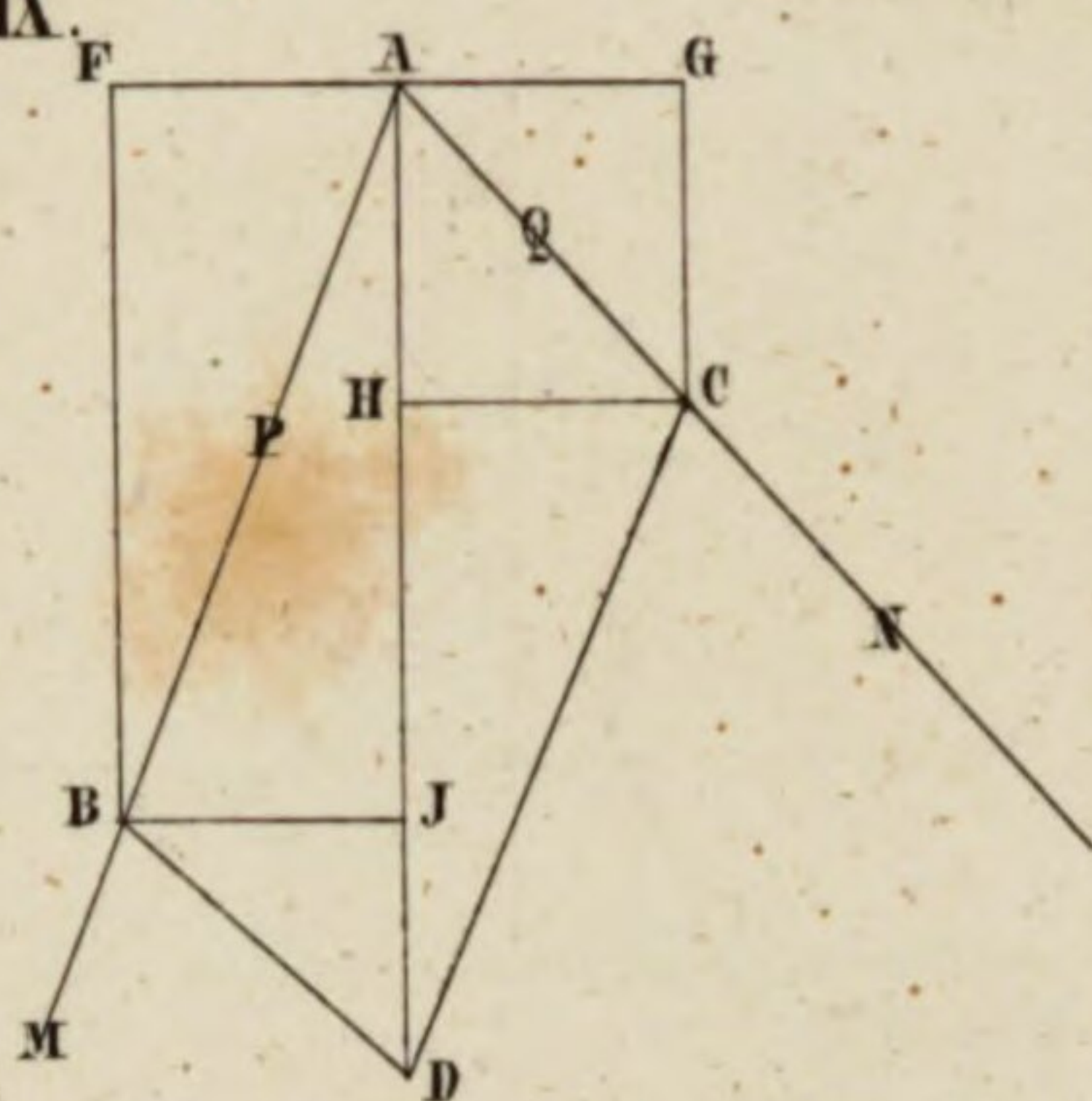


Fig. X.

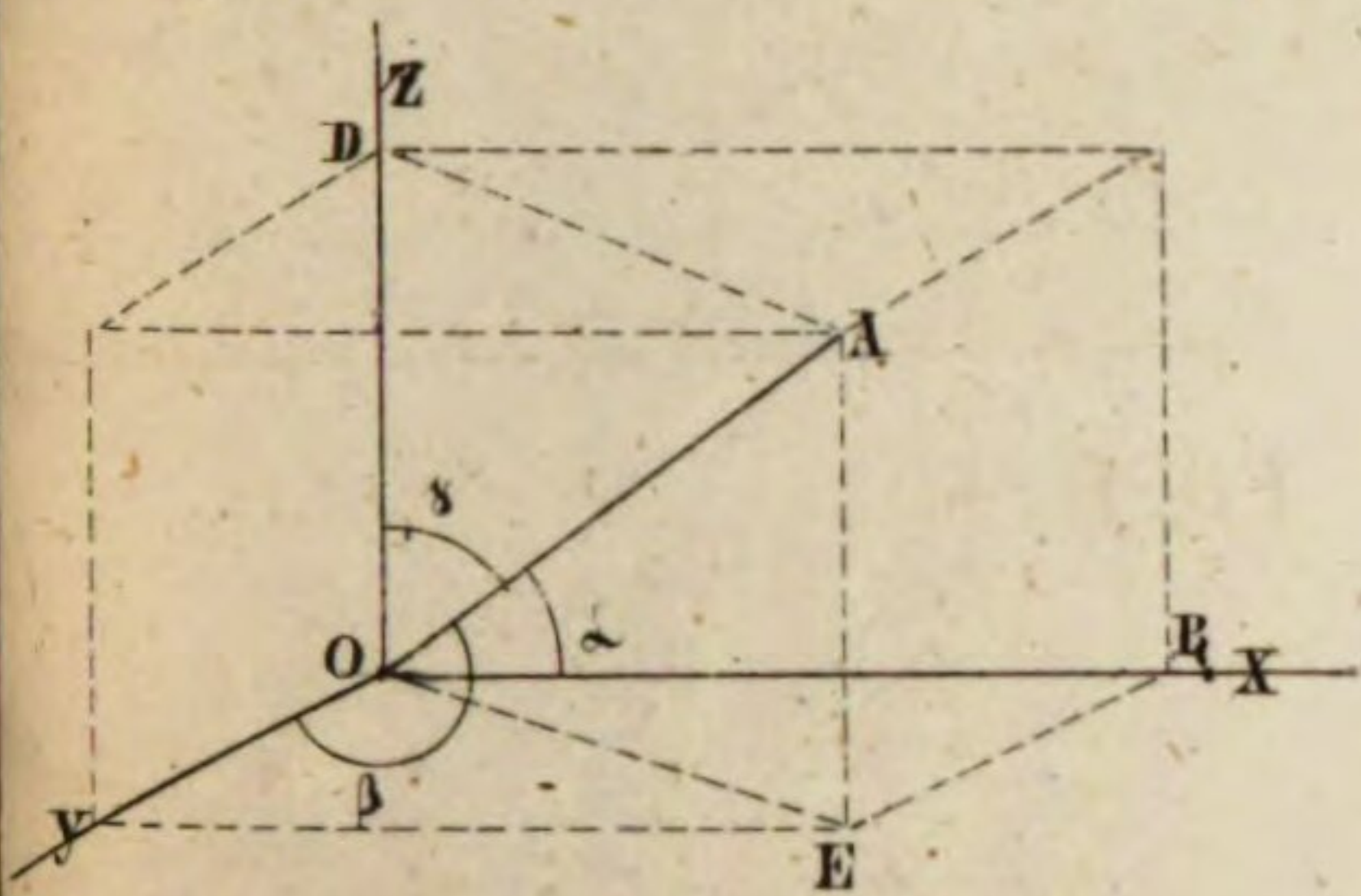


Fig. XI.

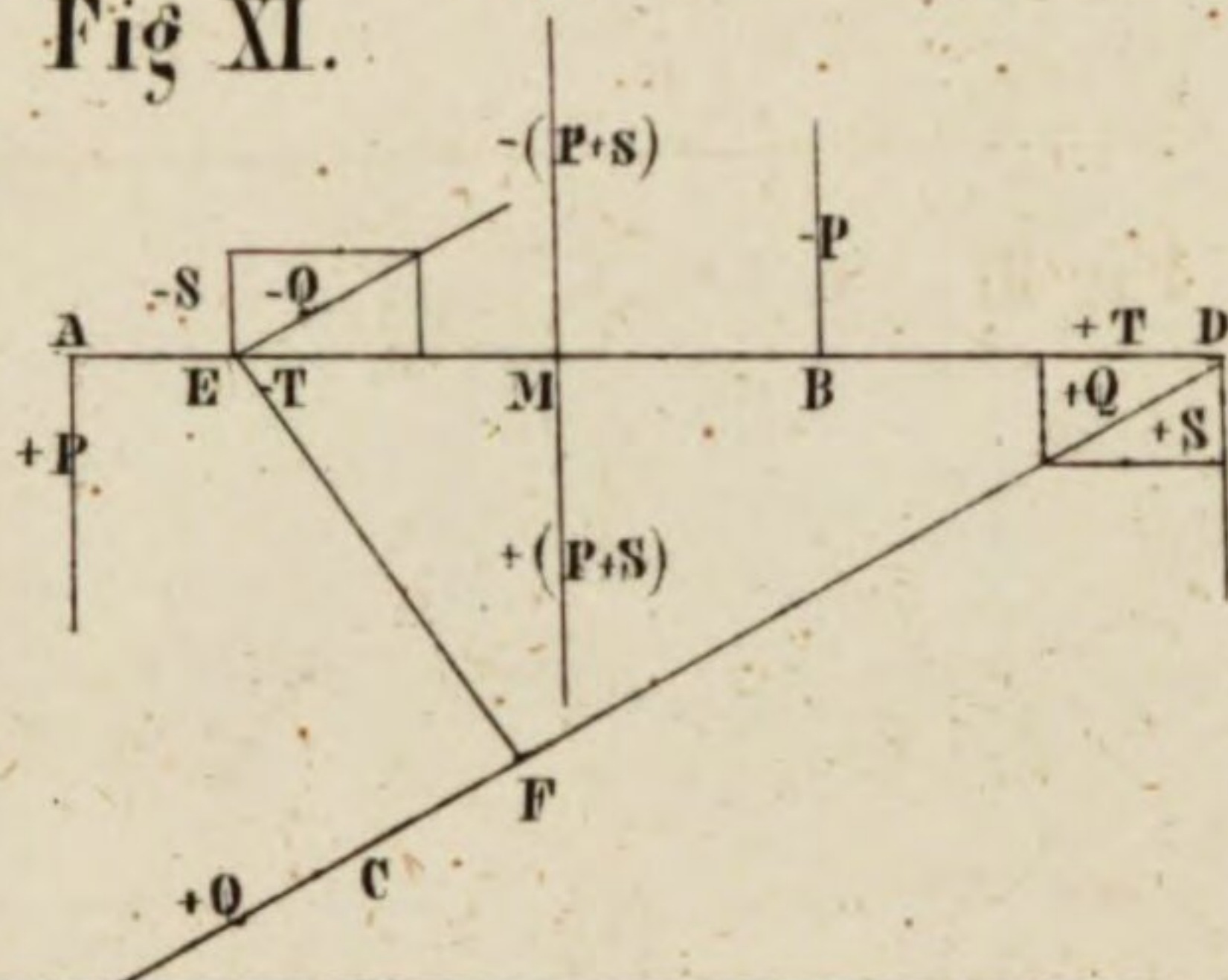


Fig. XII.

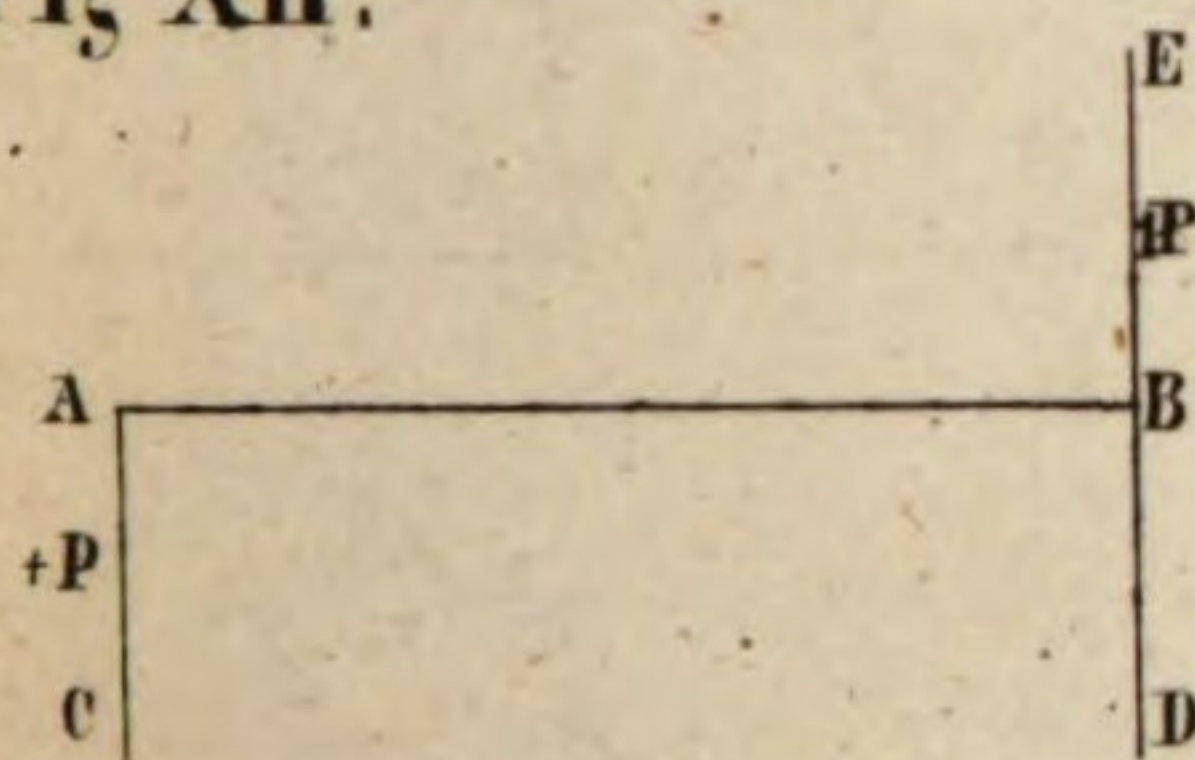


Fig. IV.

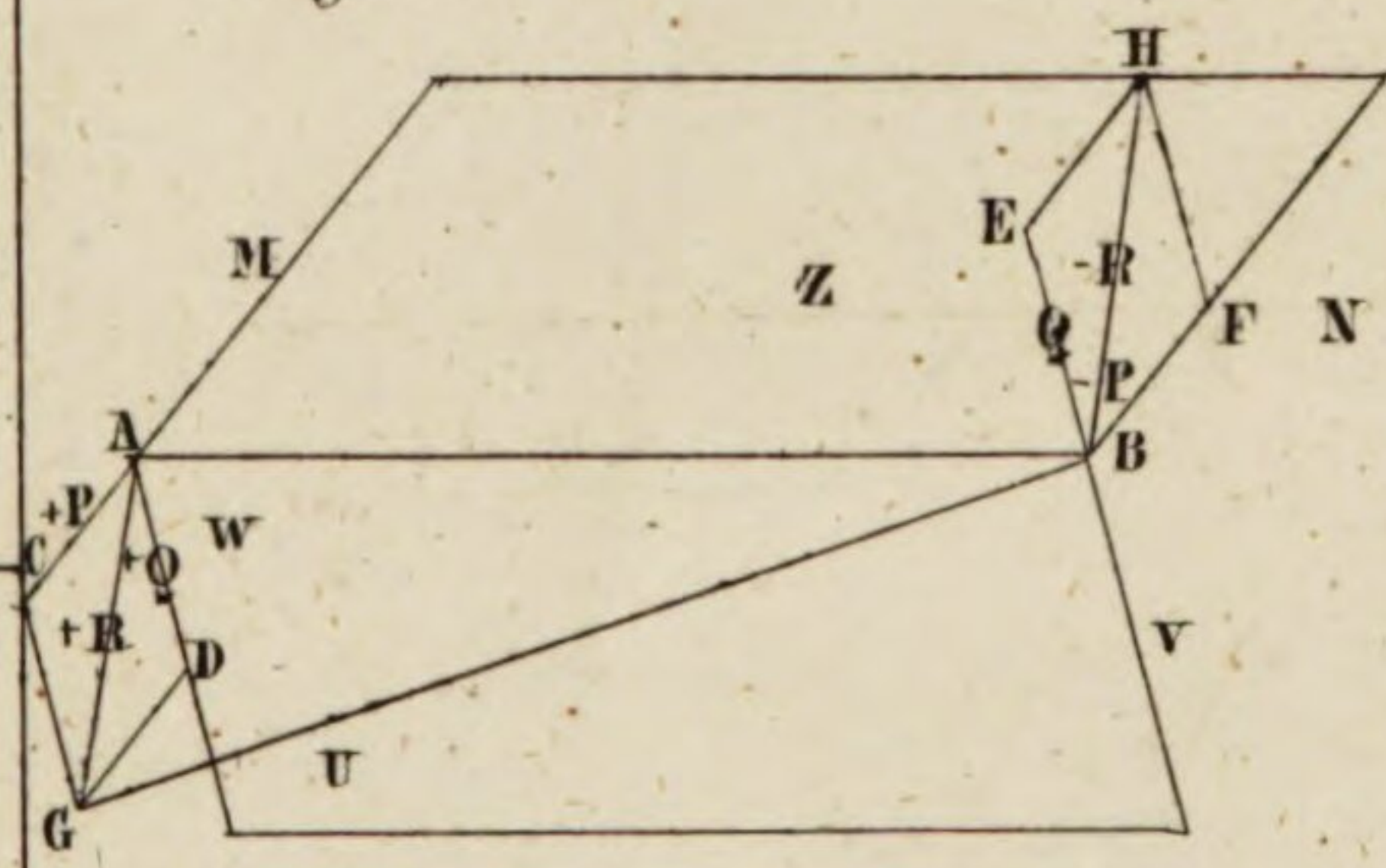


Fig. XIII.

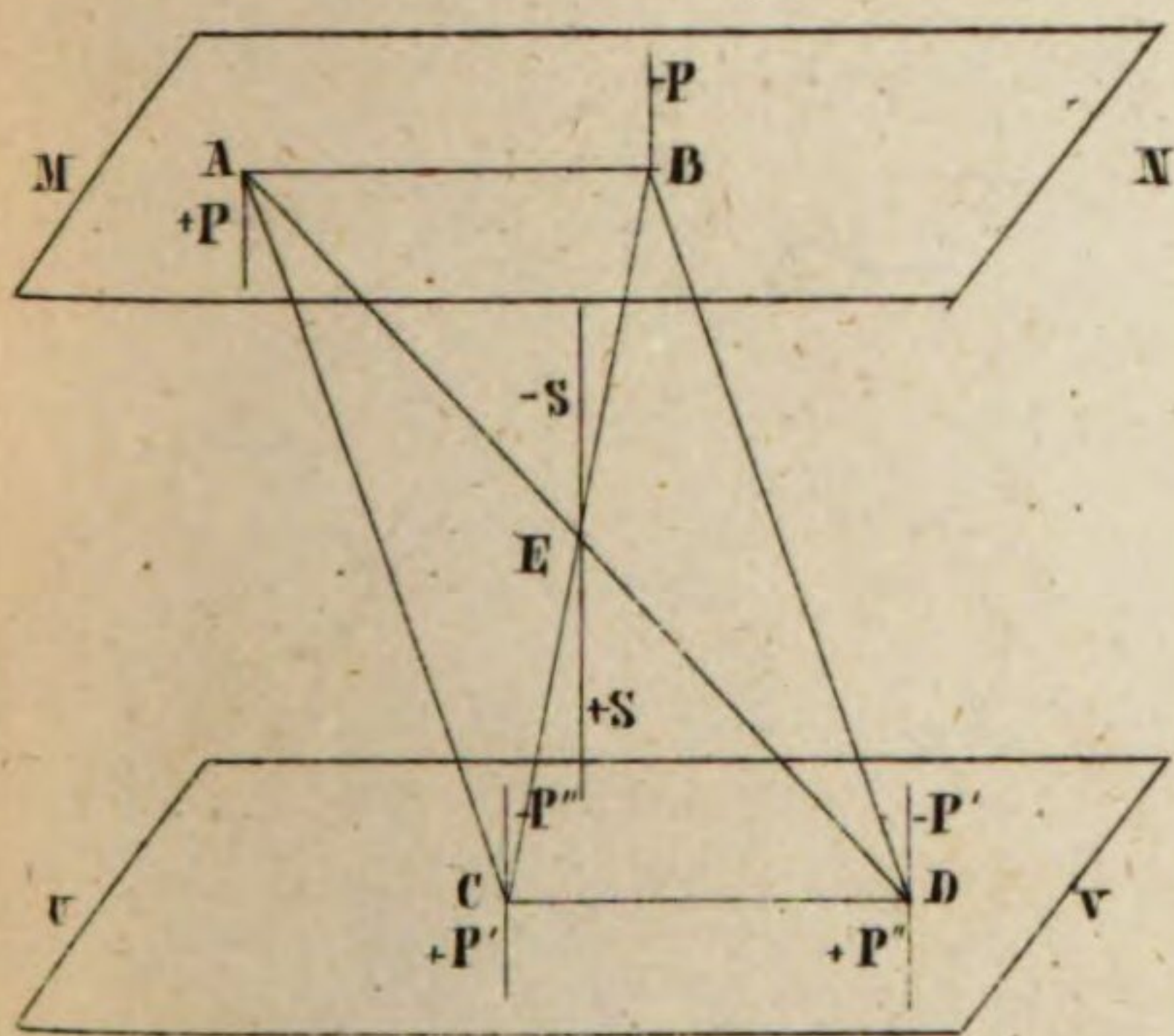


Fig. XV.

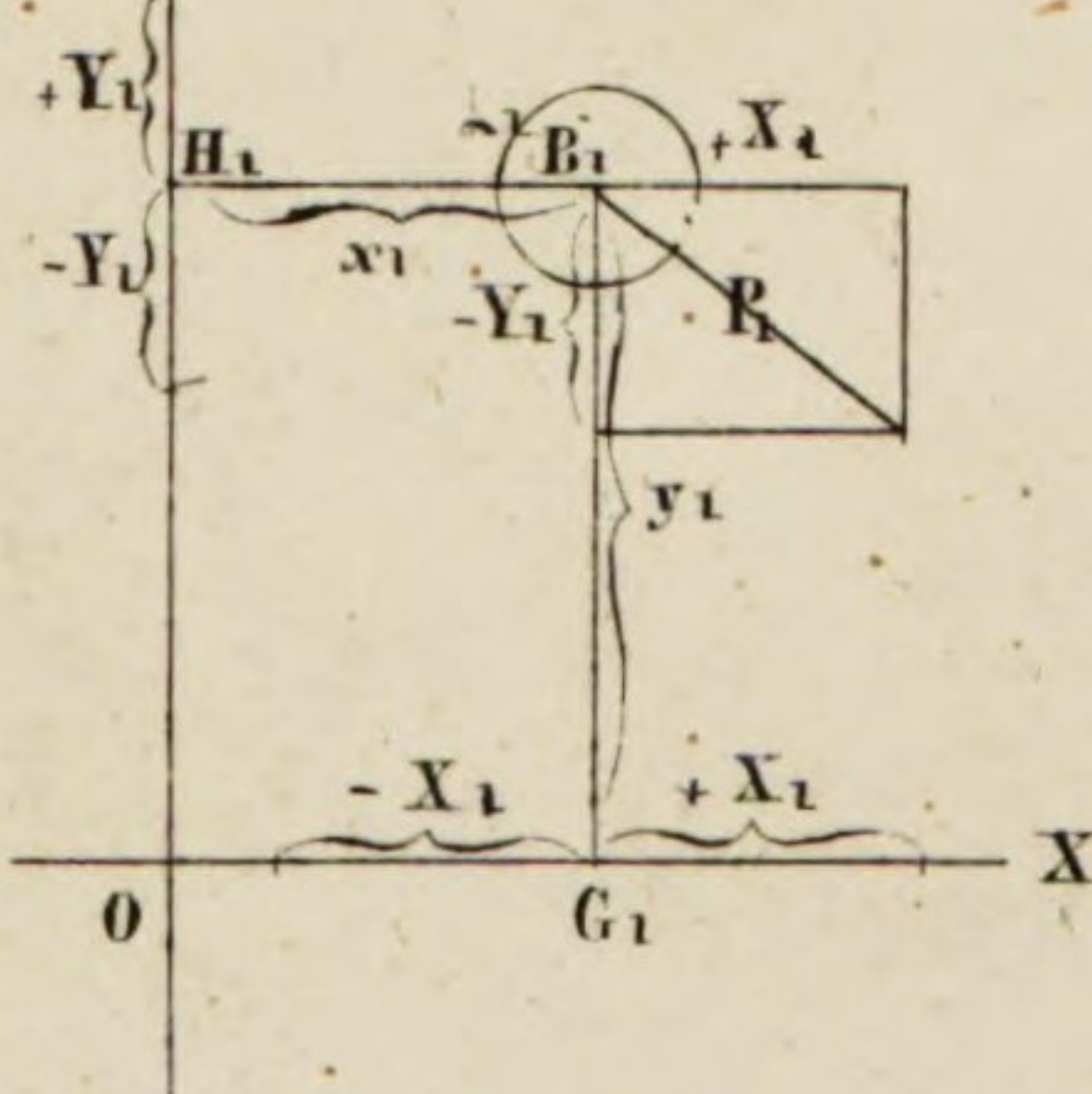


Fig. I

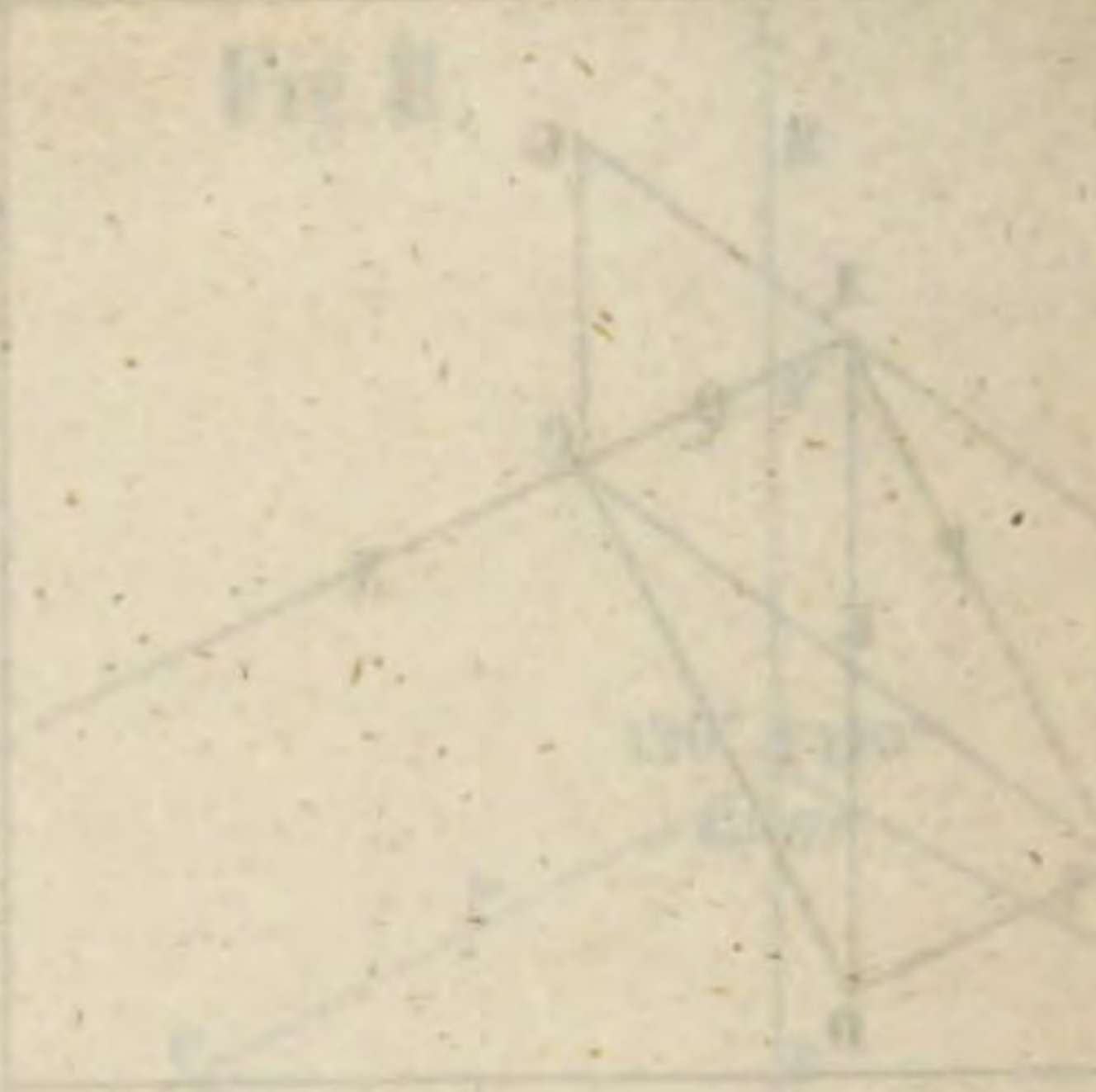


Fig. II



Fig. III

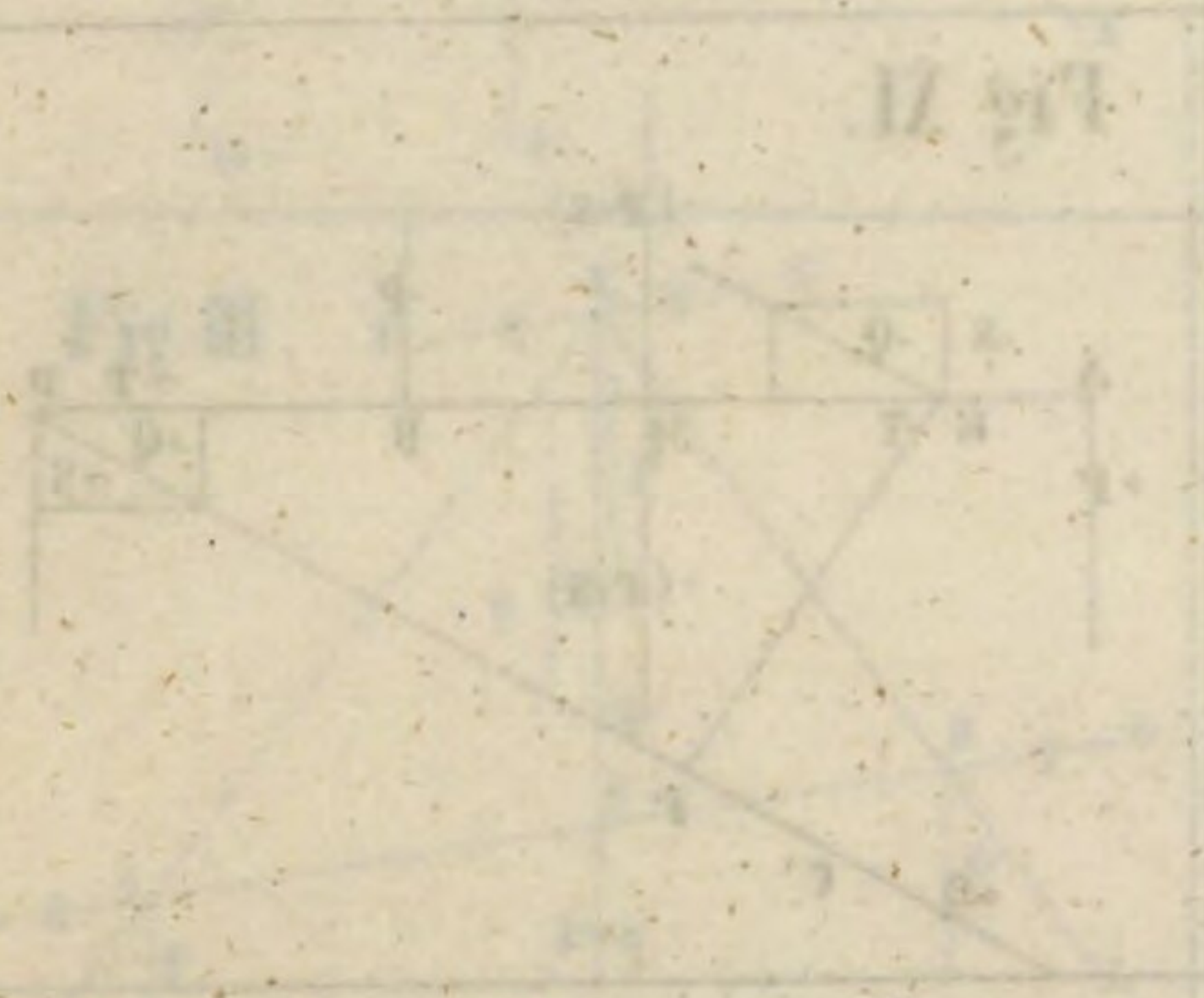


Fig. IV

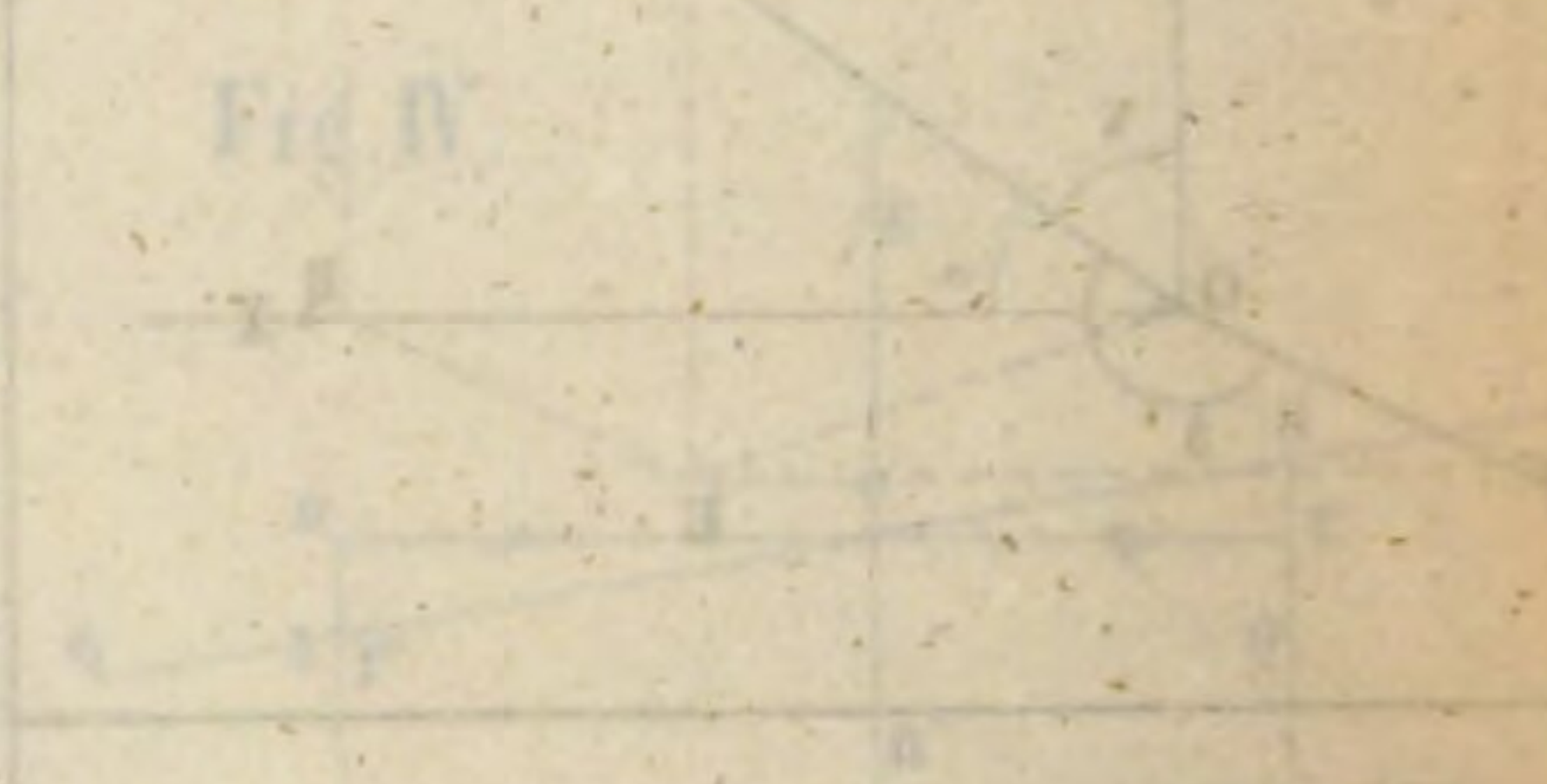


Fig. V



Fig. VI

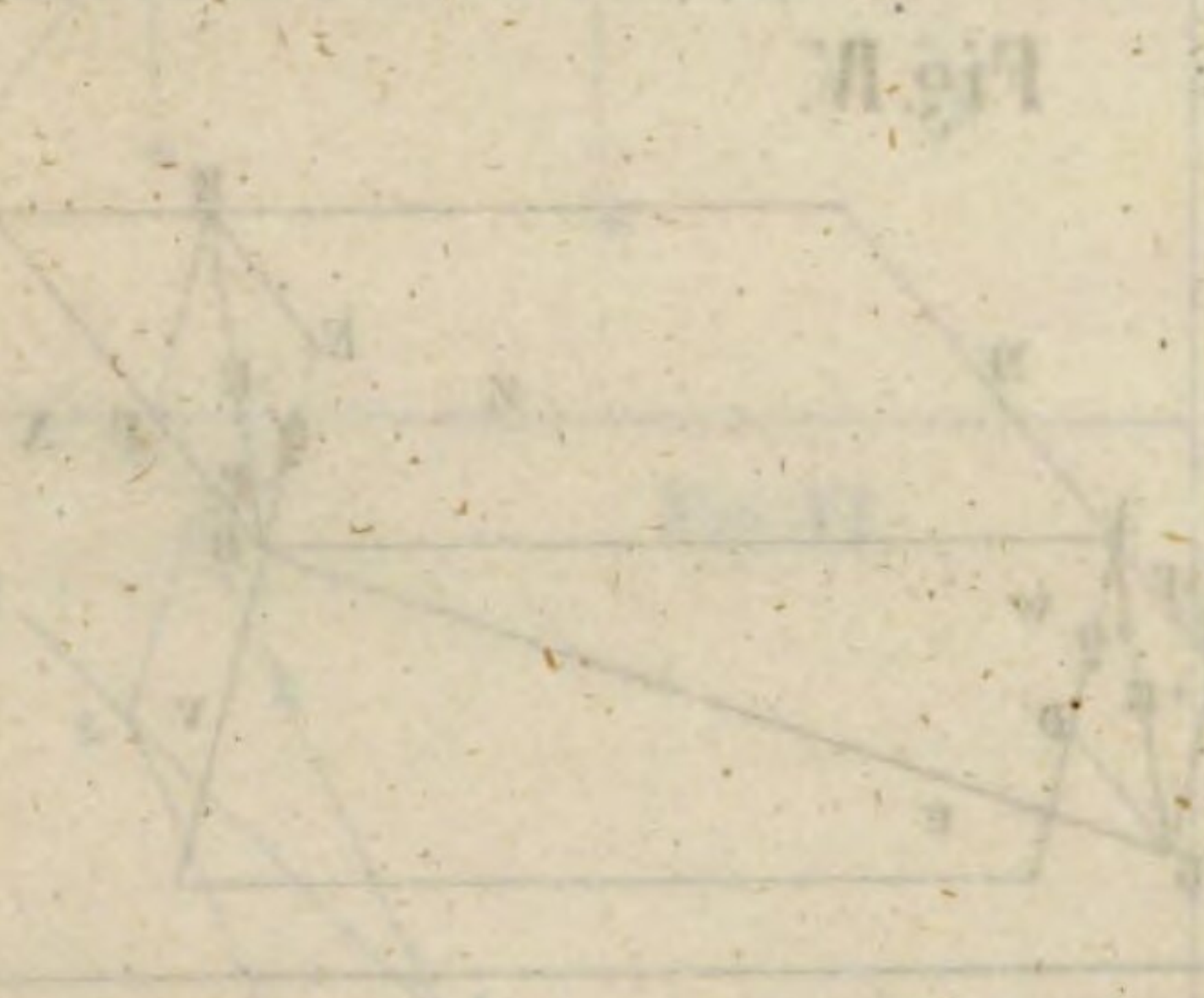


Fig. VII

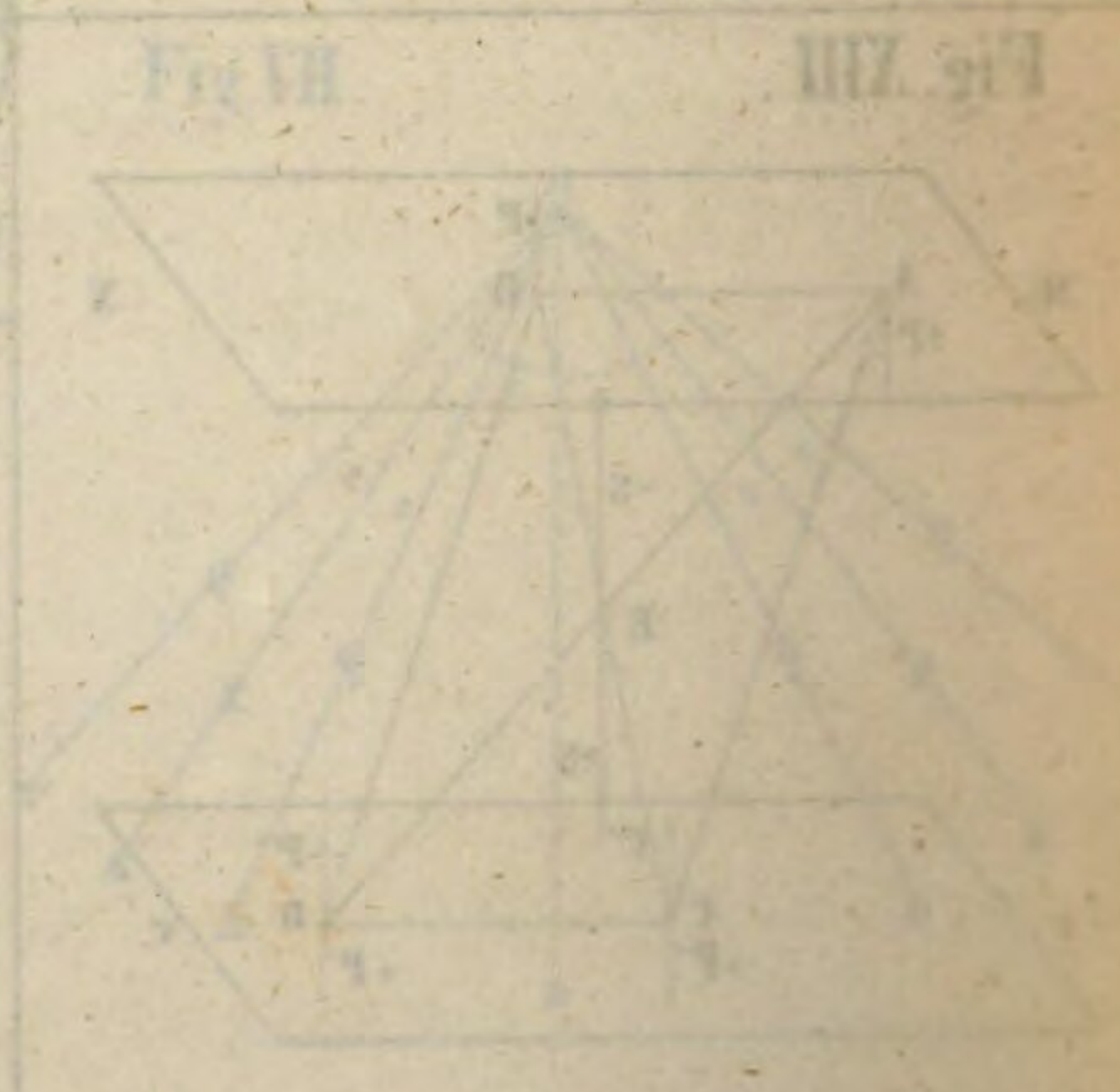
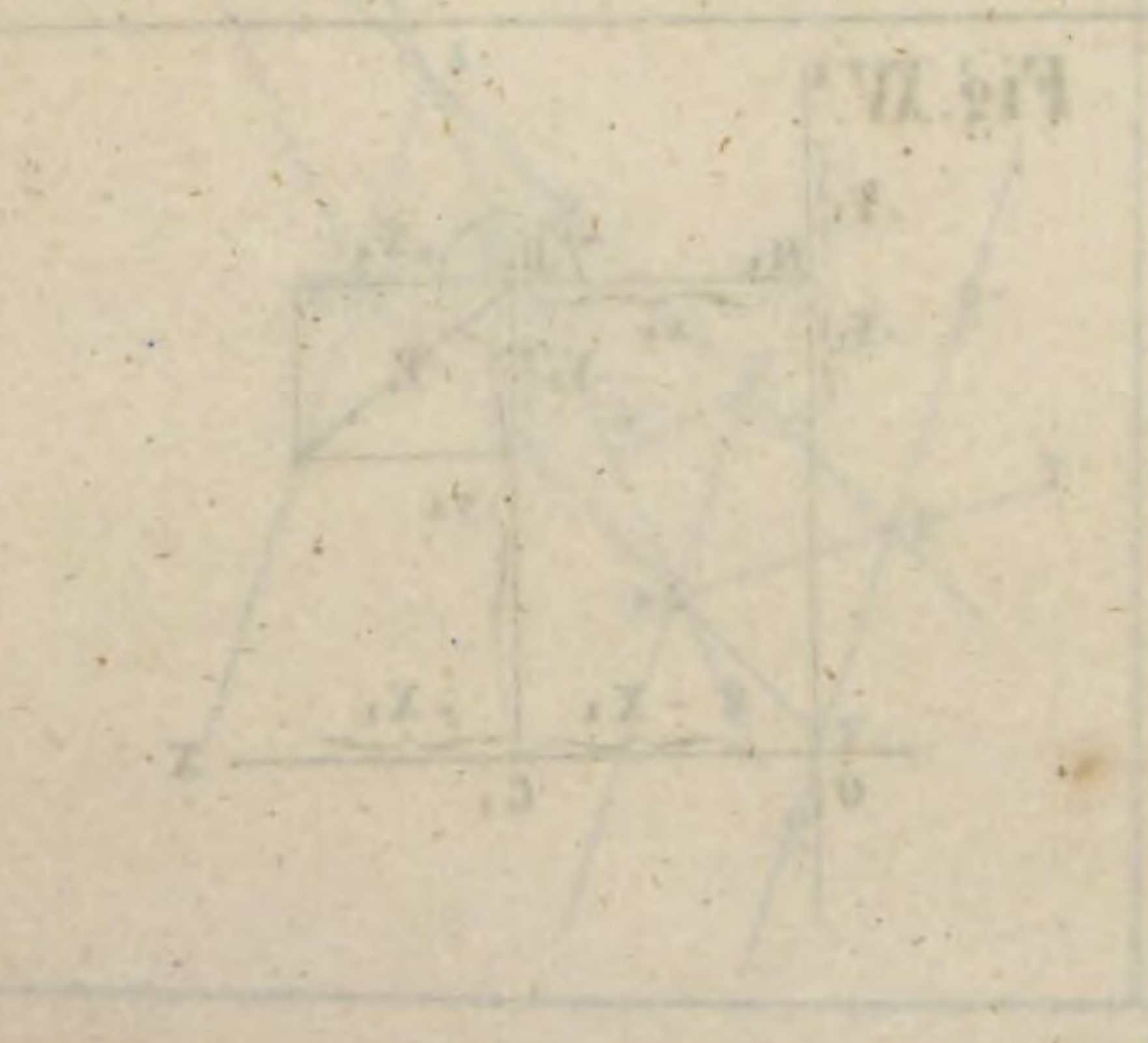
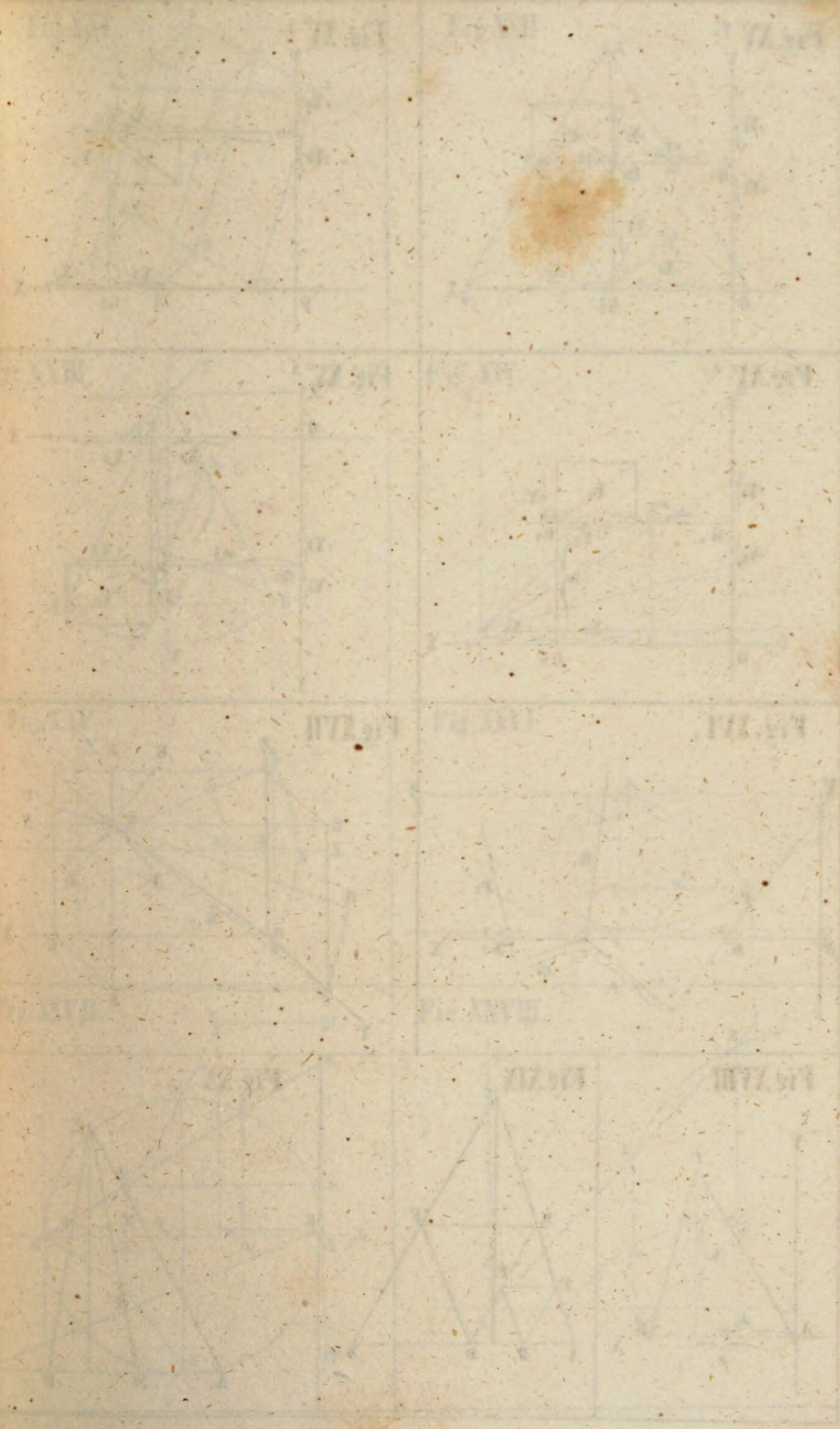


Fig. VIII





Tafel III.

Fig. XV^{2.}

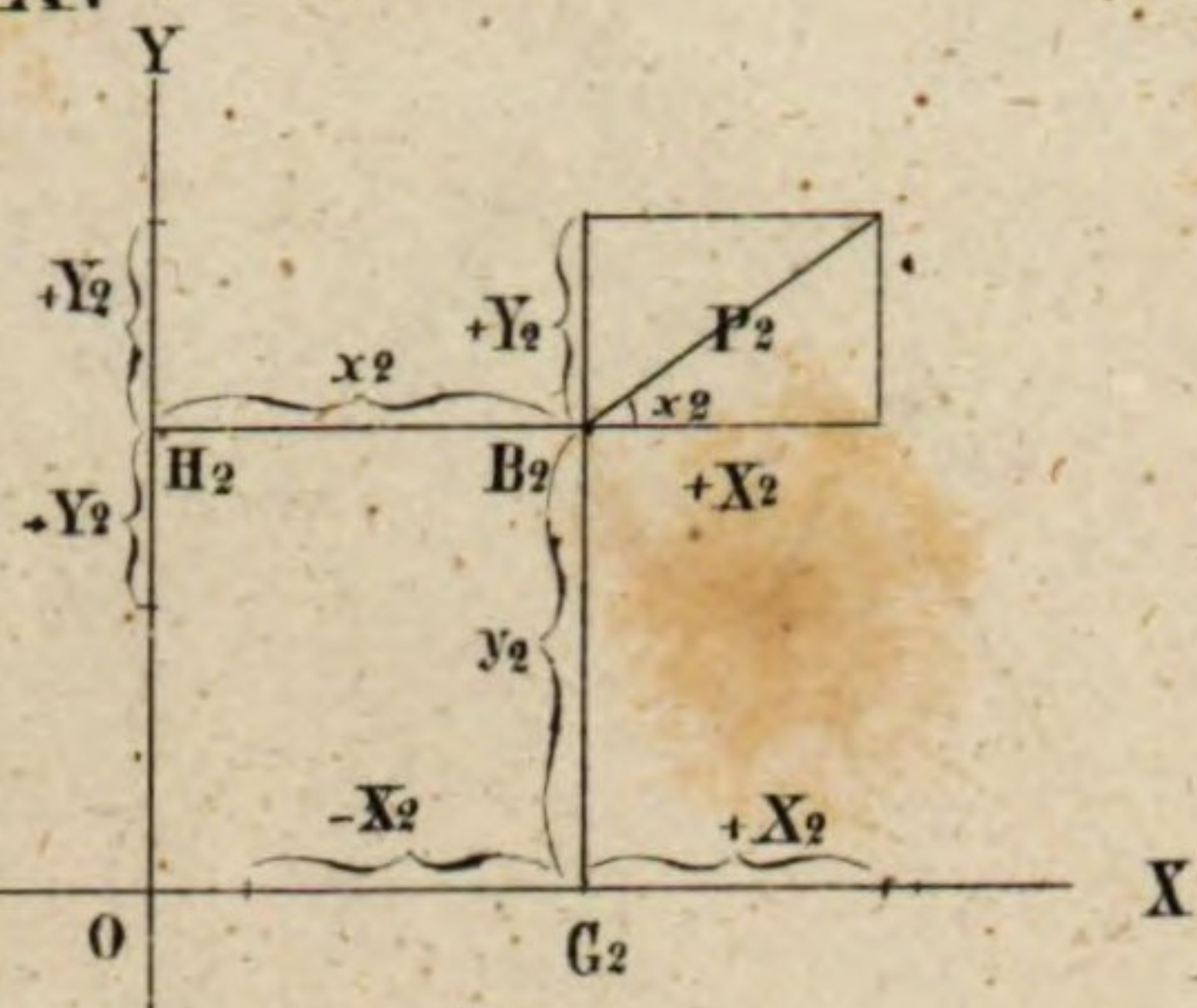


Fig. XV^{3.}

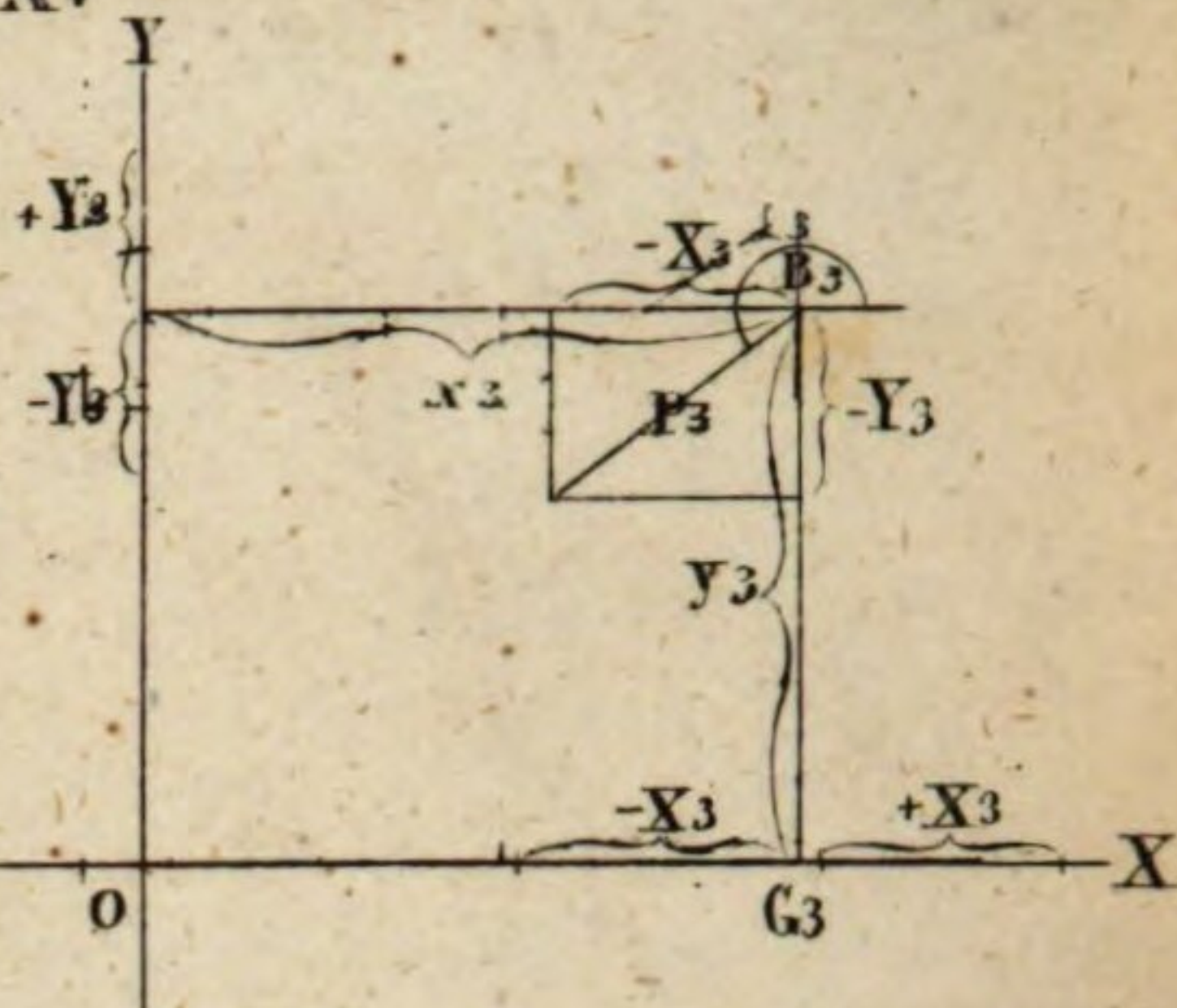


Fig. XV^{4.}

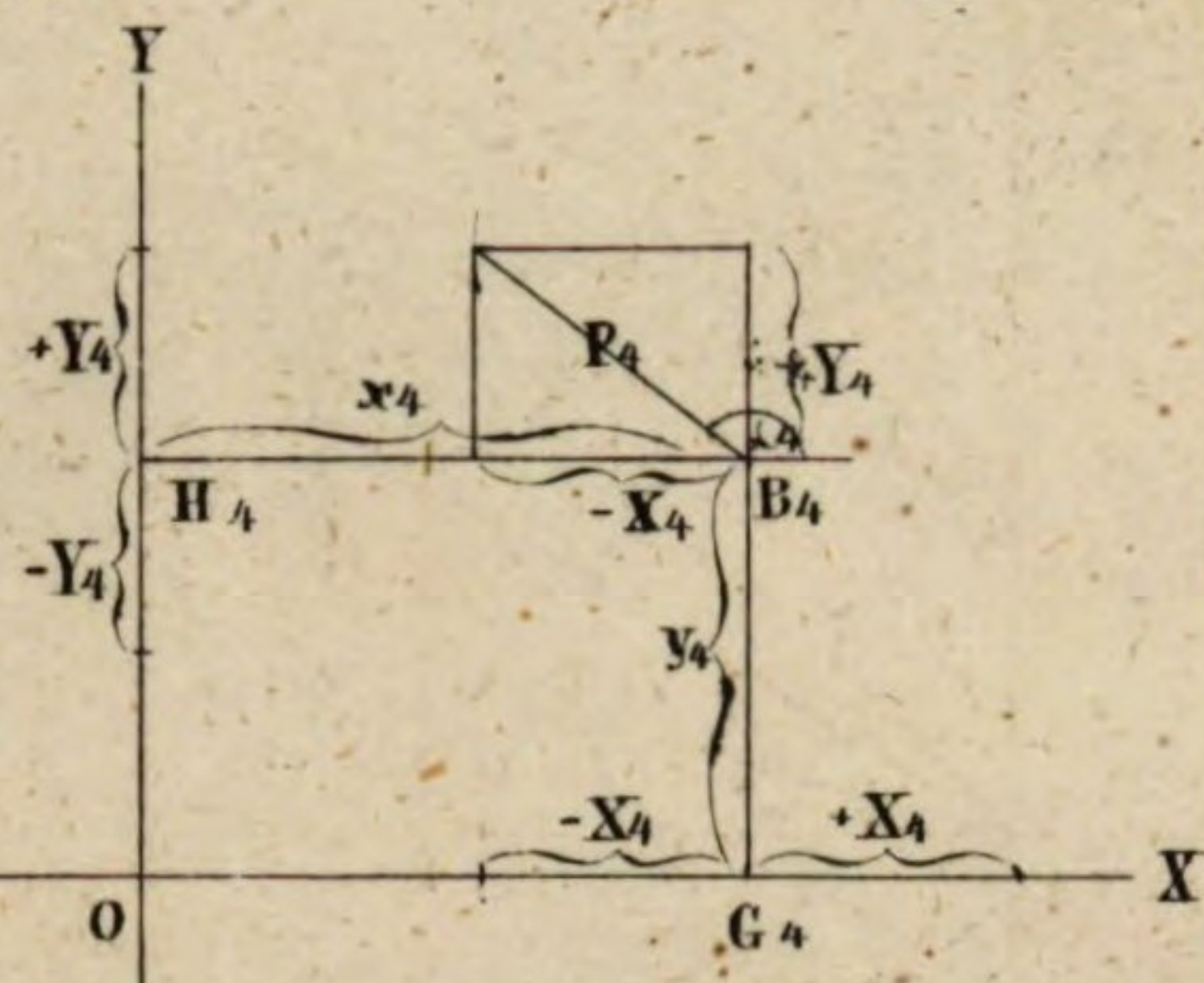


Fig. XV^{5.}

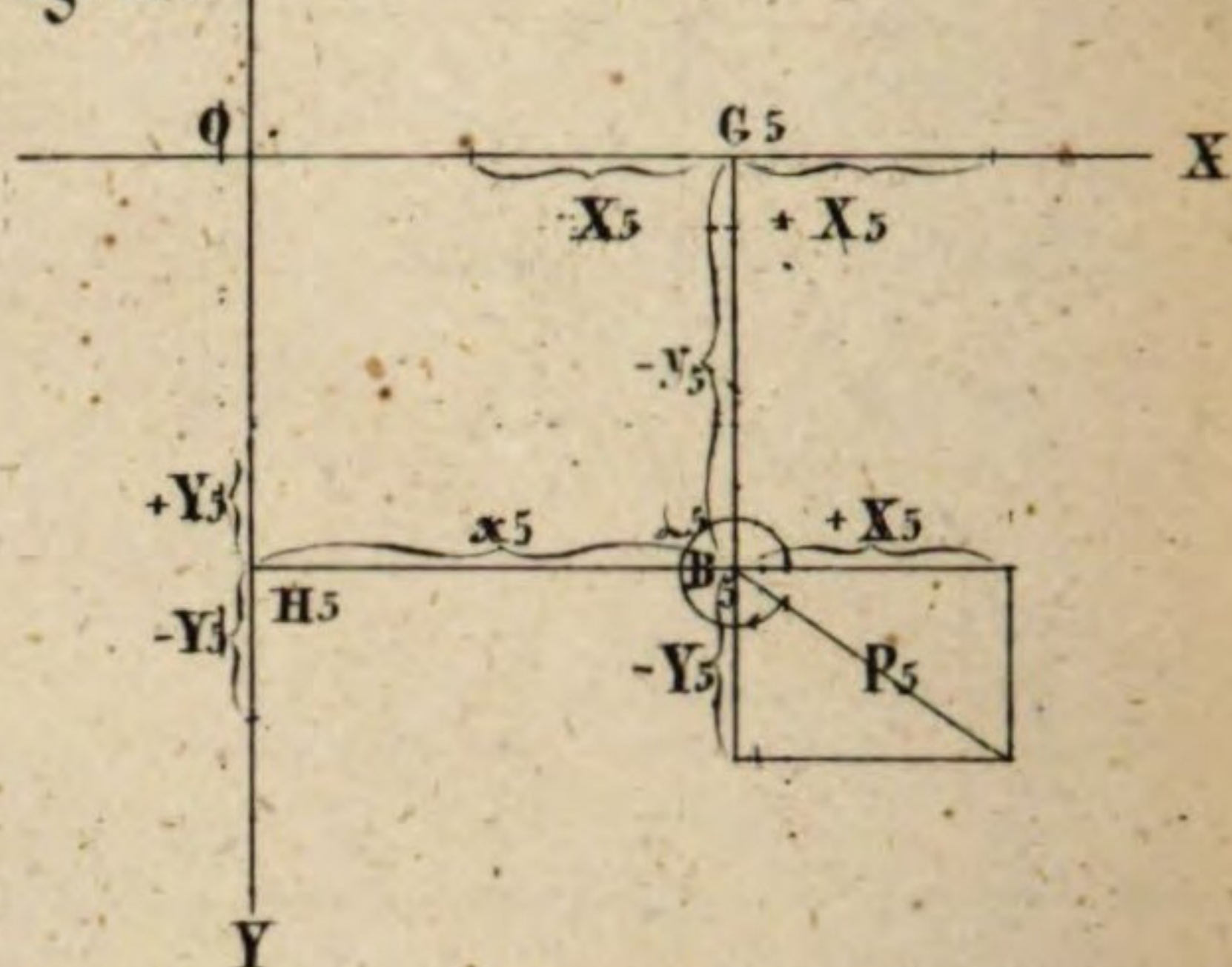


Fig. XVI.

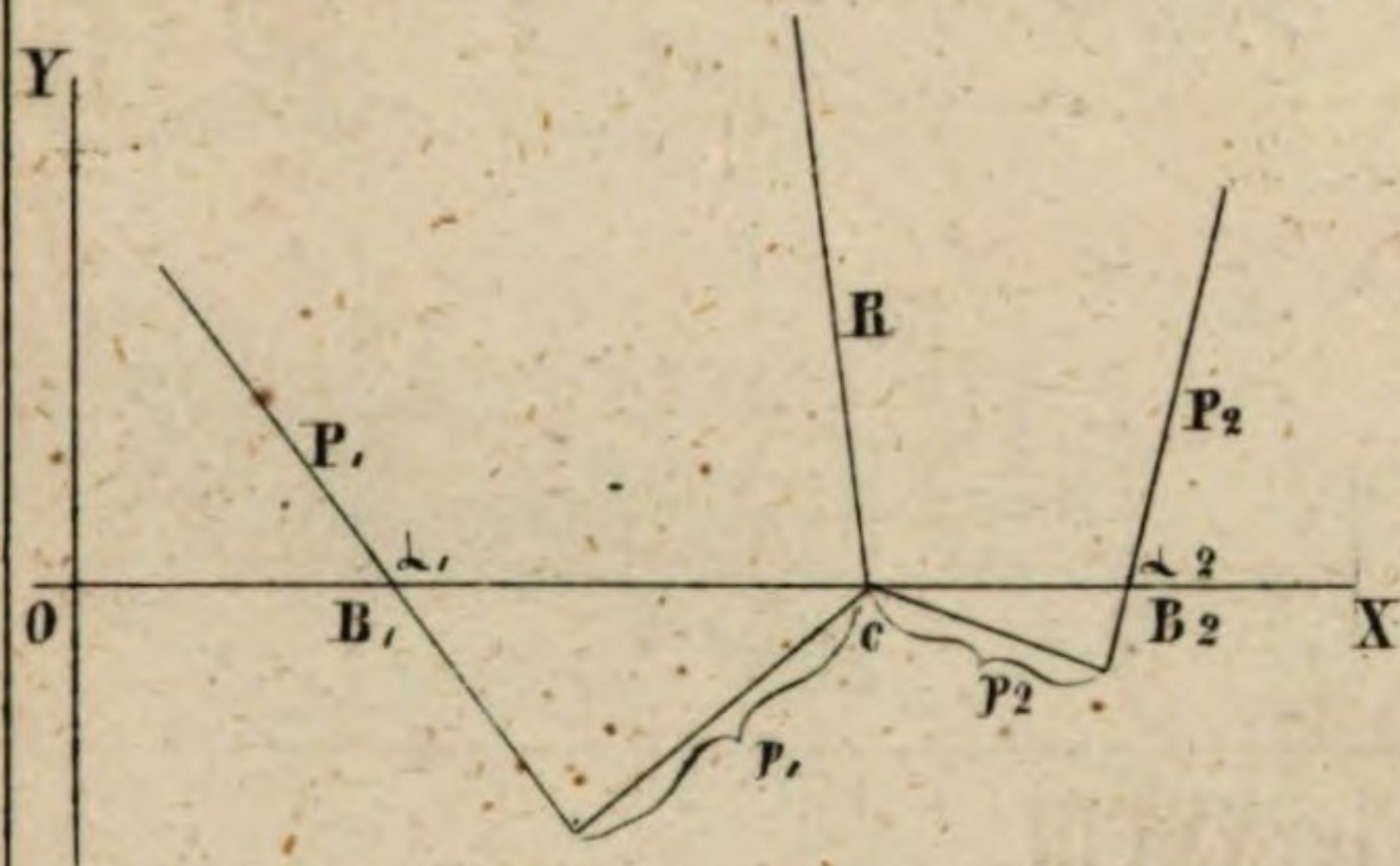


Fig. XVII.

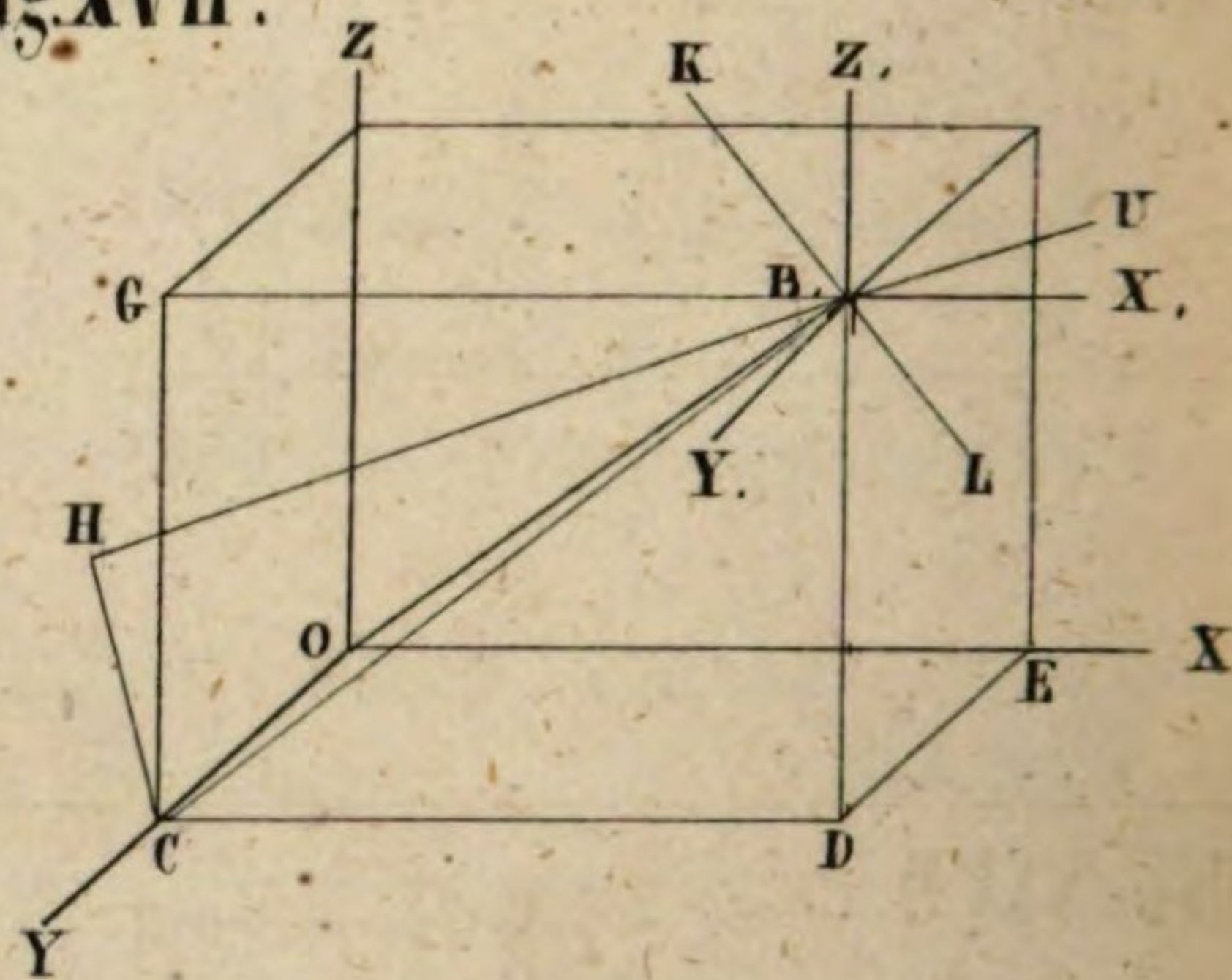


Fig. XVIII.

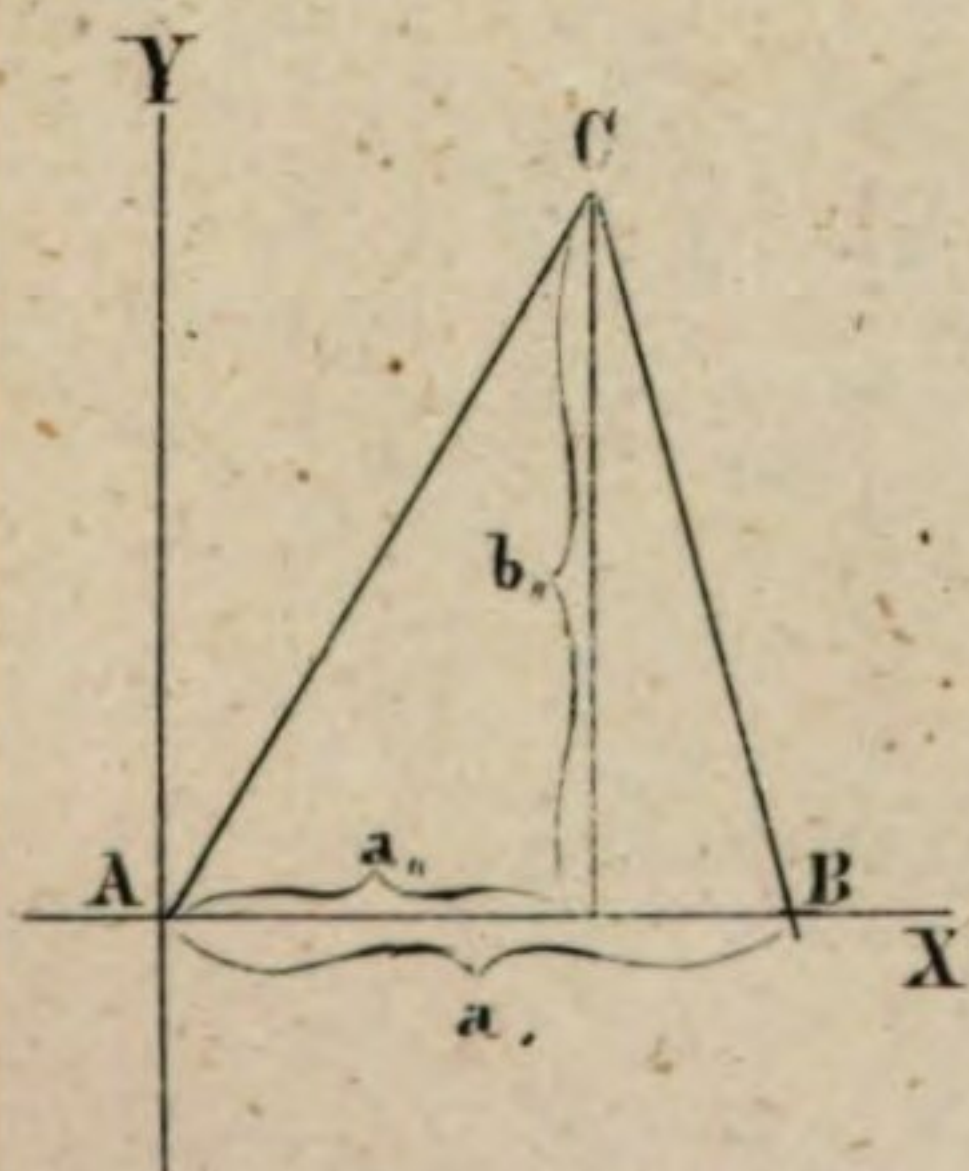


Fig. XIX.

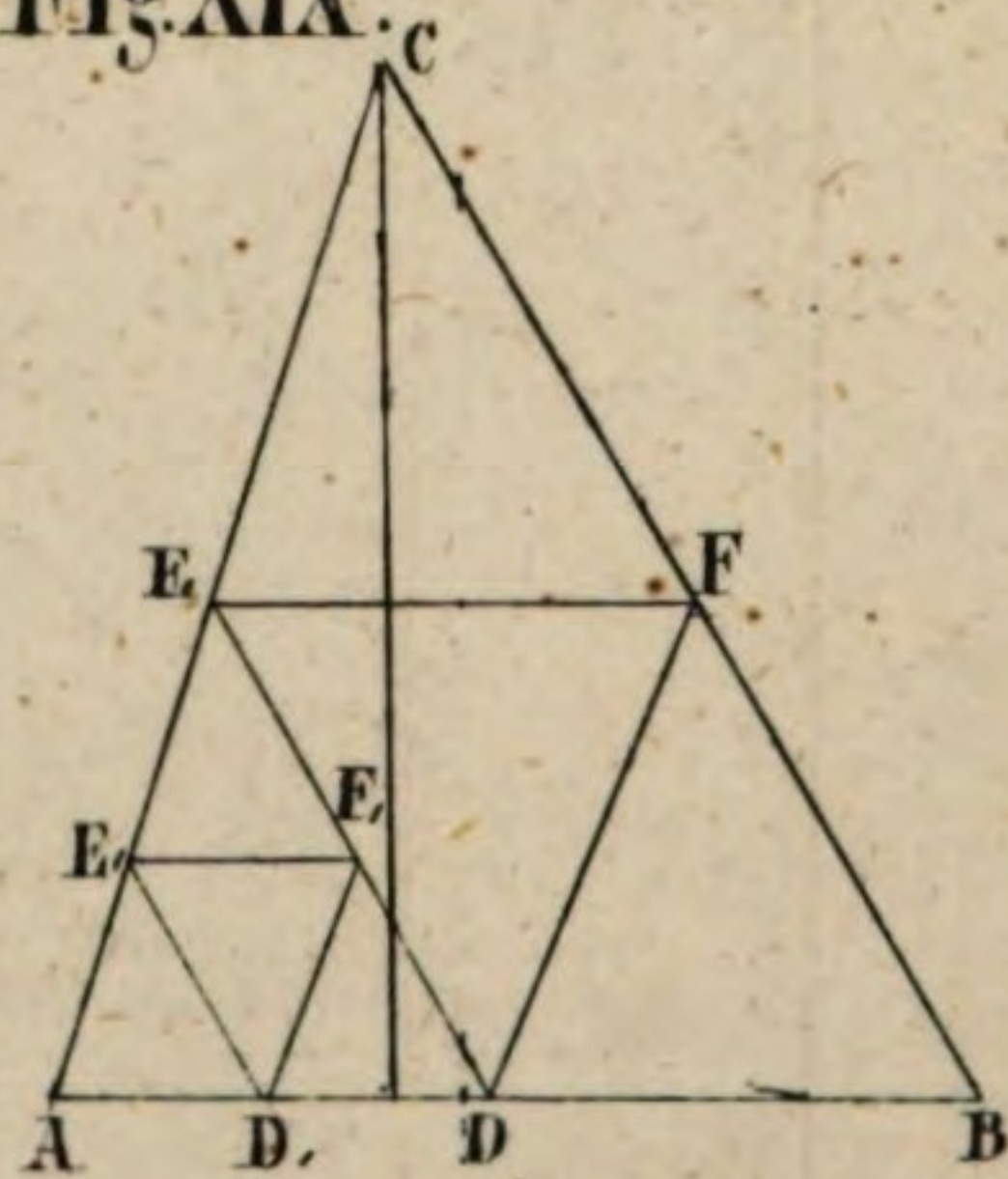
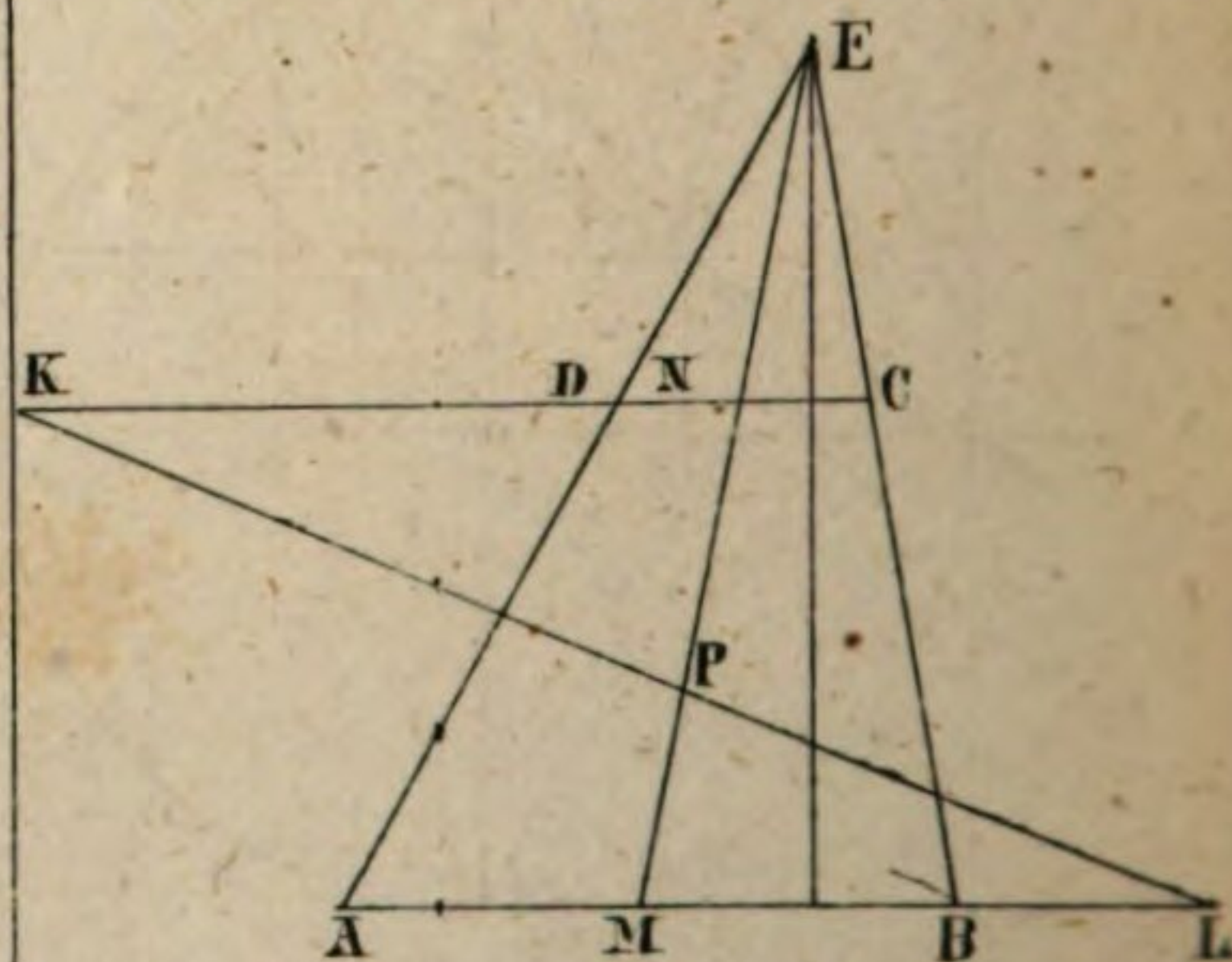


Fig. XX.



Tafel IV.

Fig. XXI.

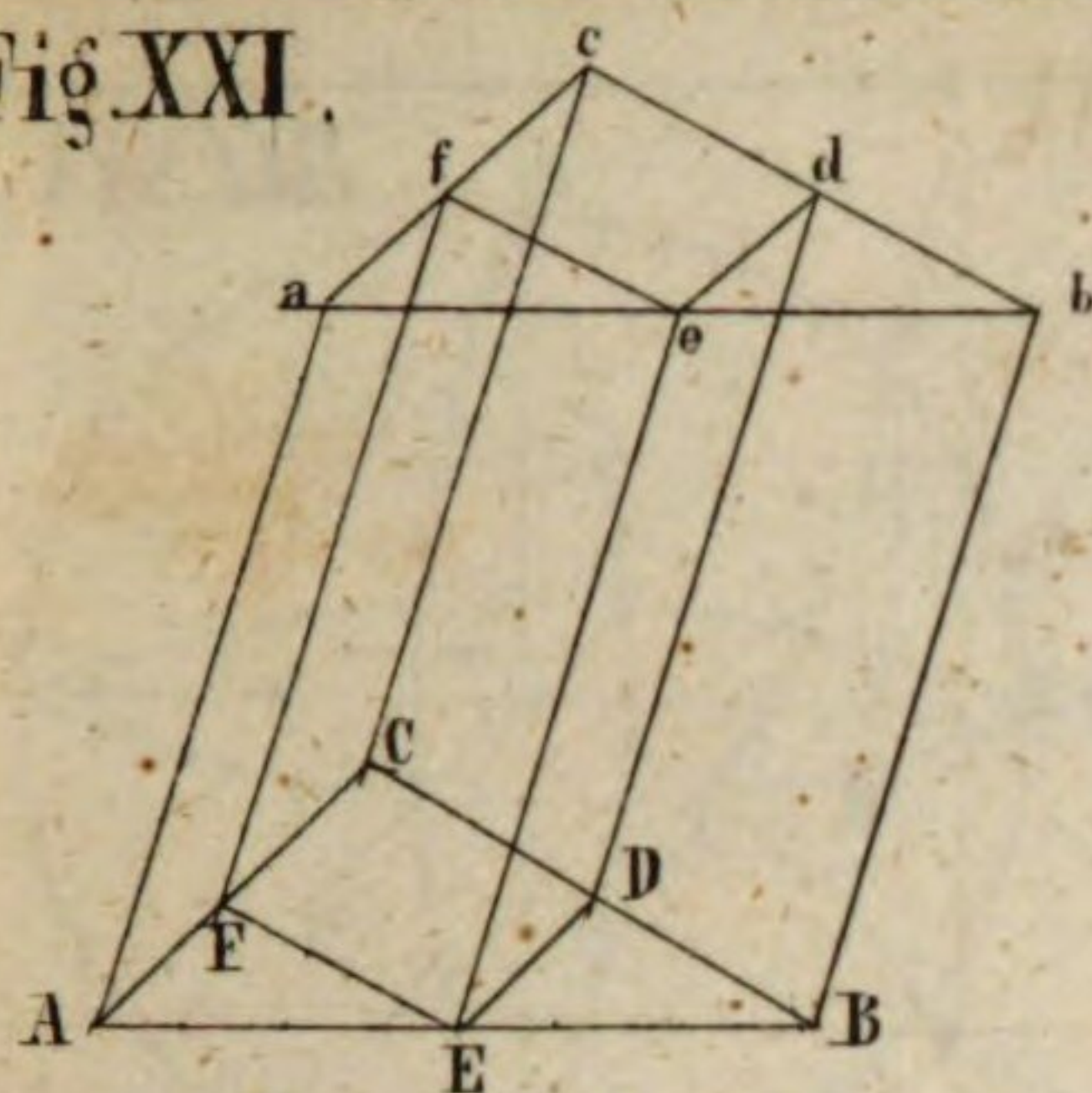


Fig XXII.

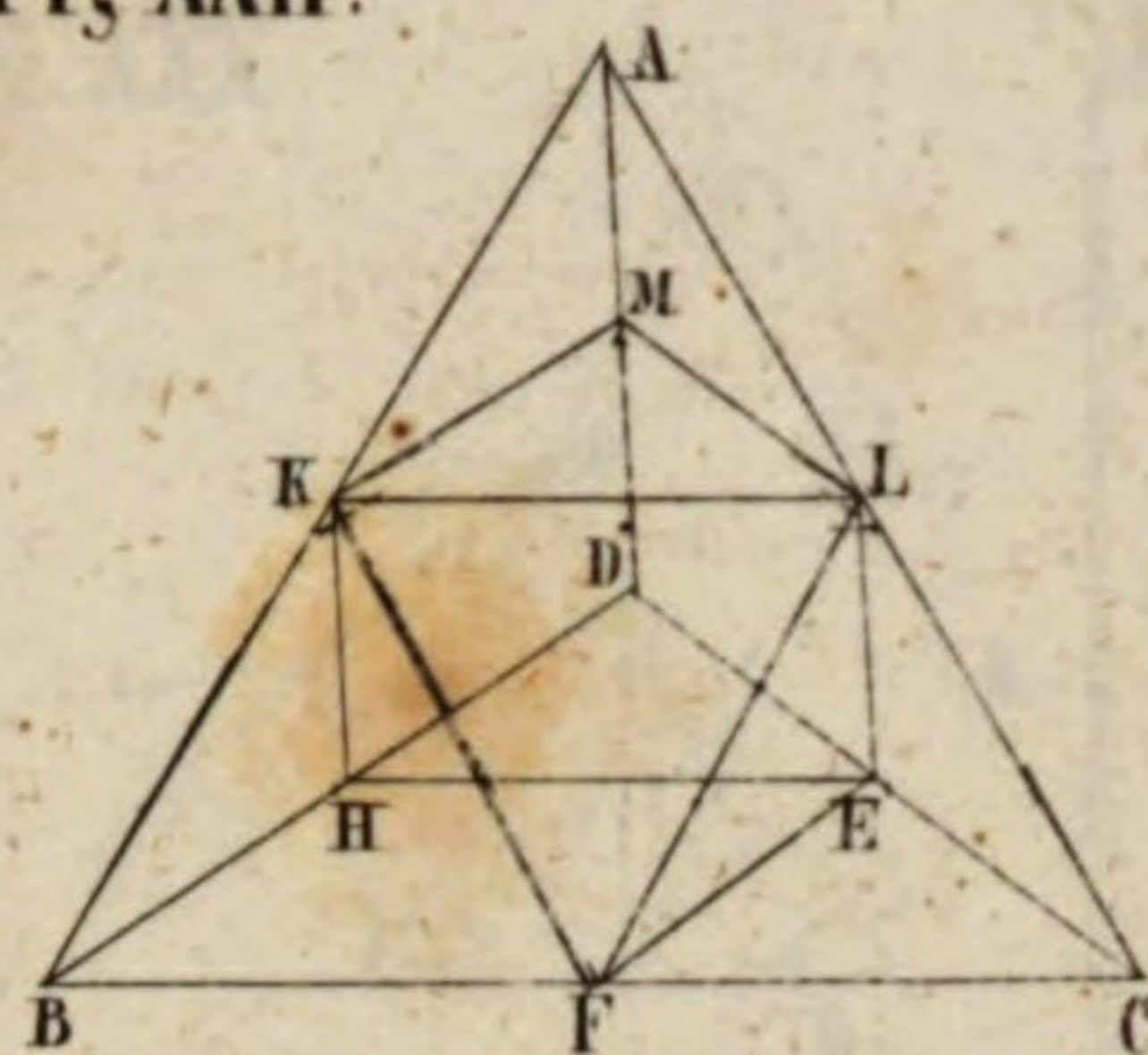


Fig. XXIII.

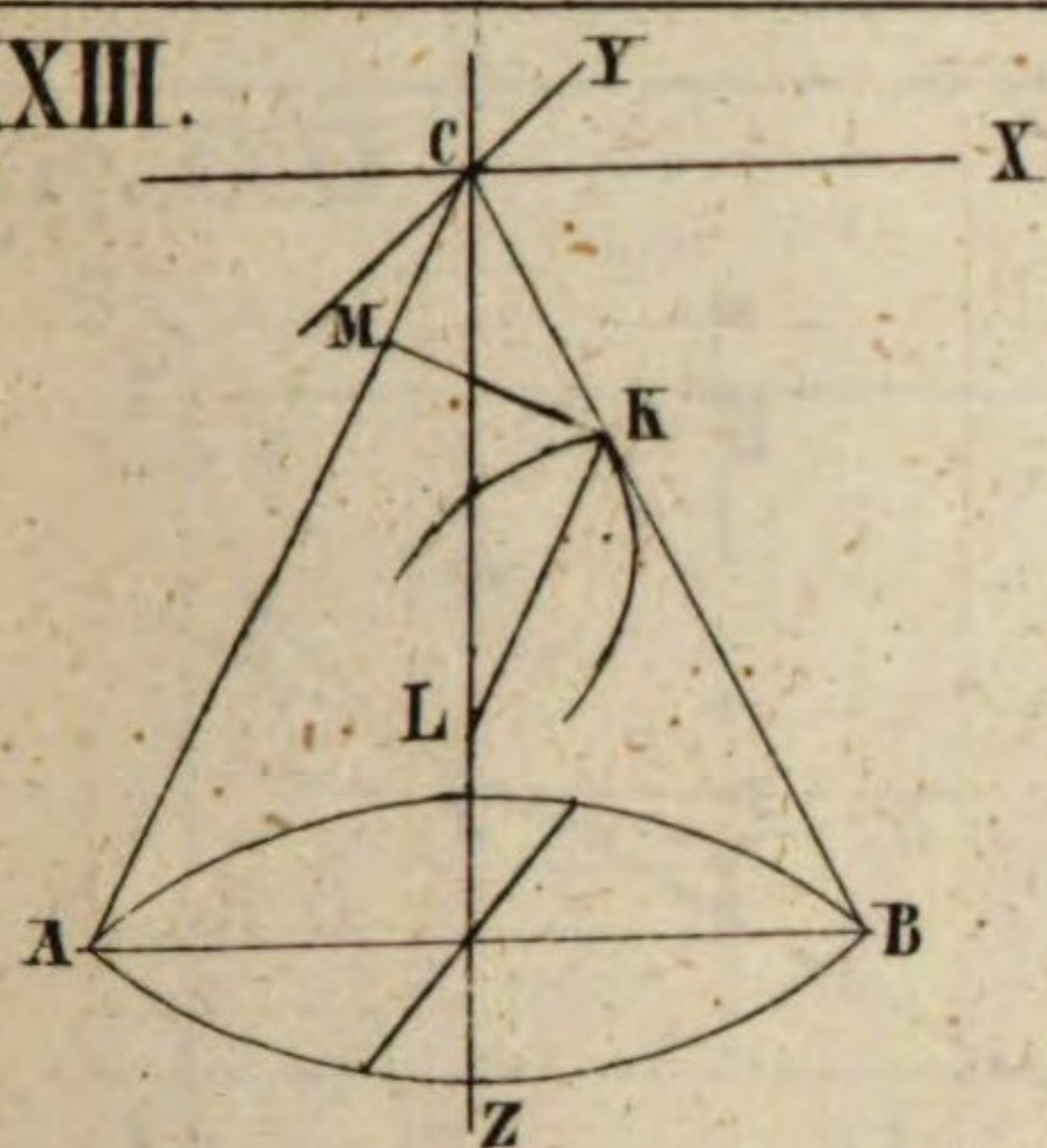


Fig. XIV.

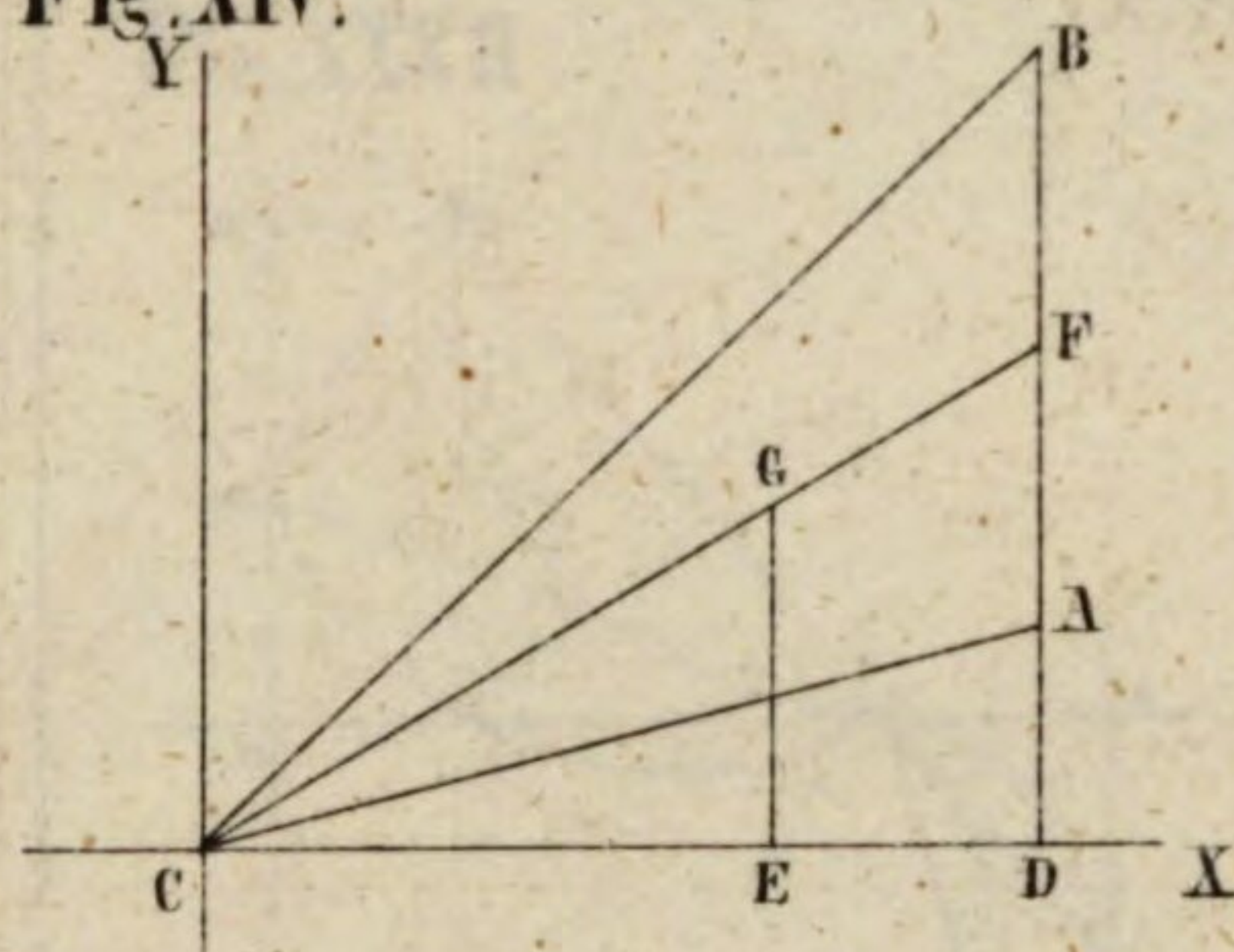


Fig. XXV.

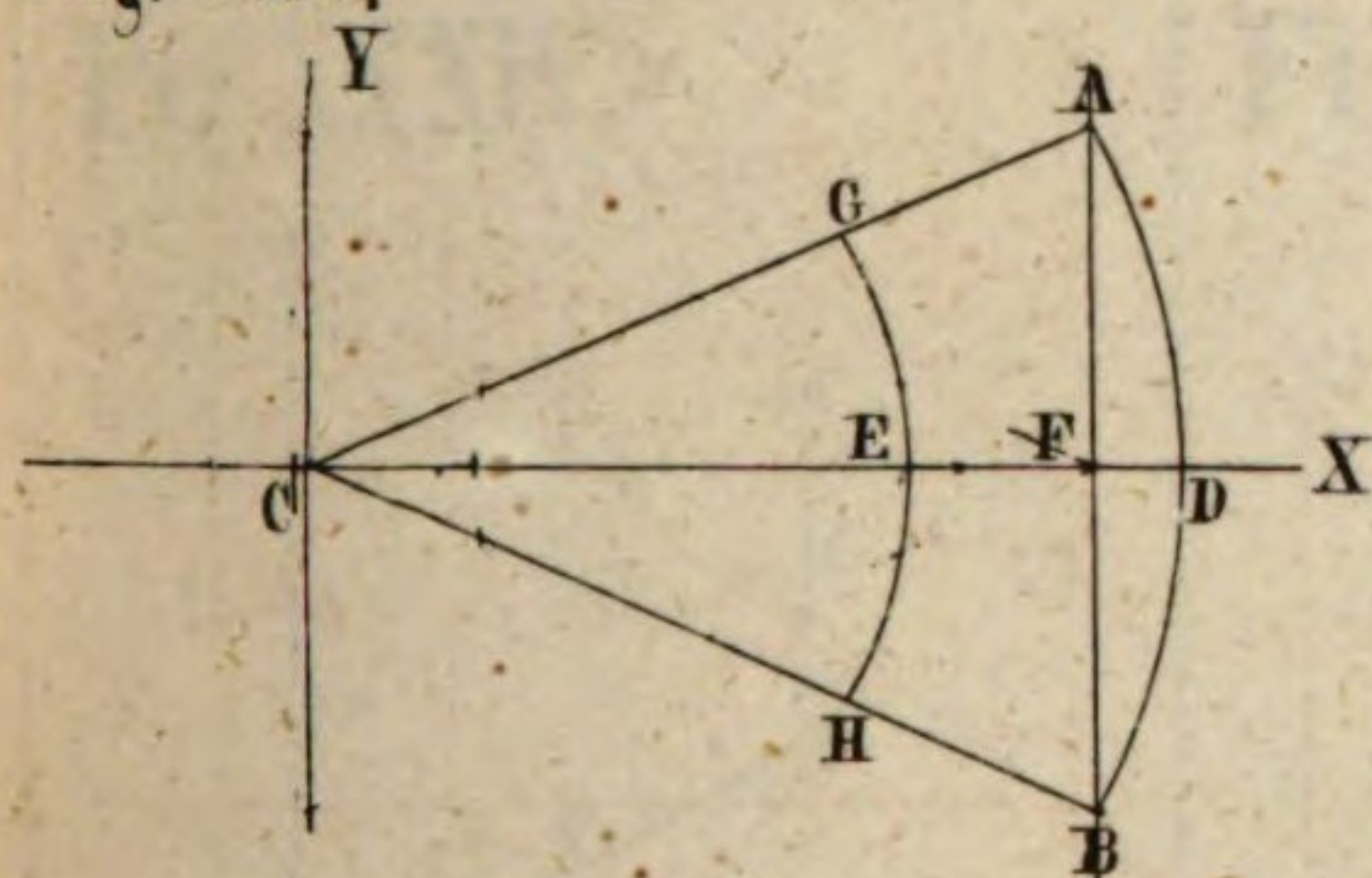


Fig. XXVI.

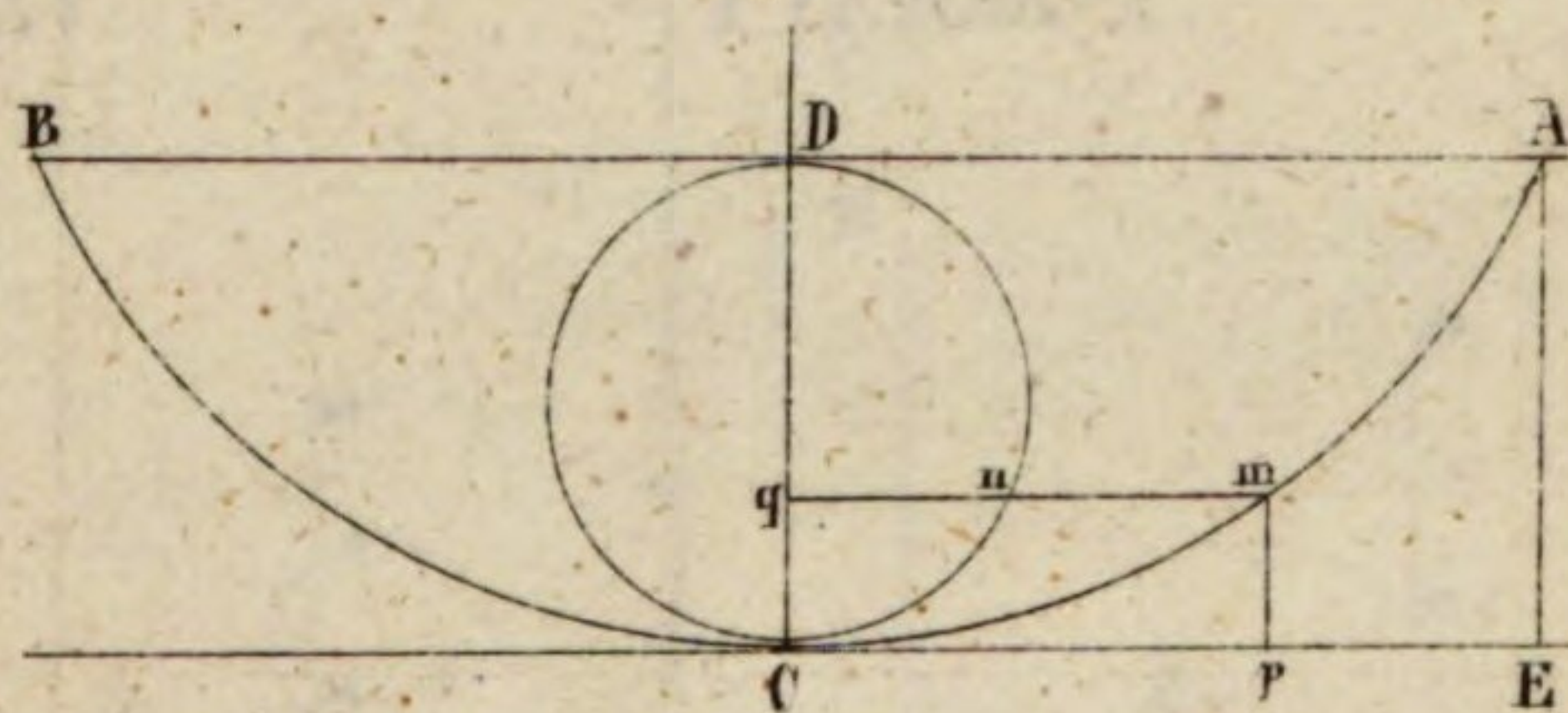


Fig. XXVII.

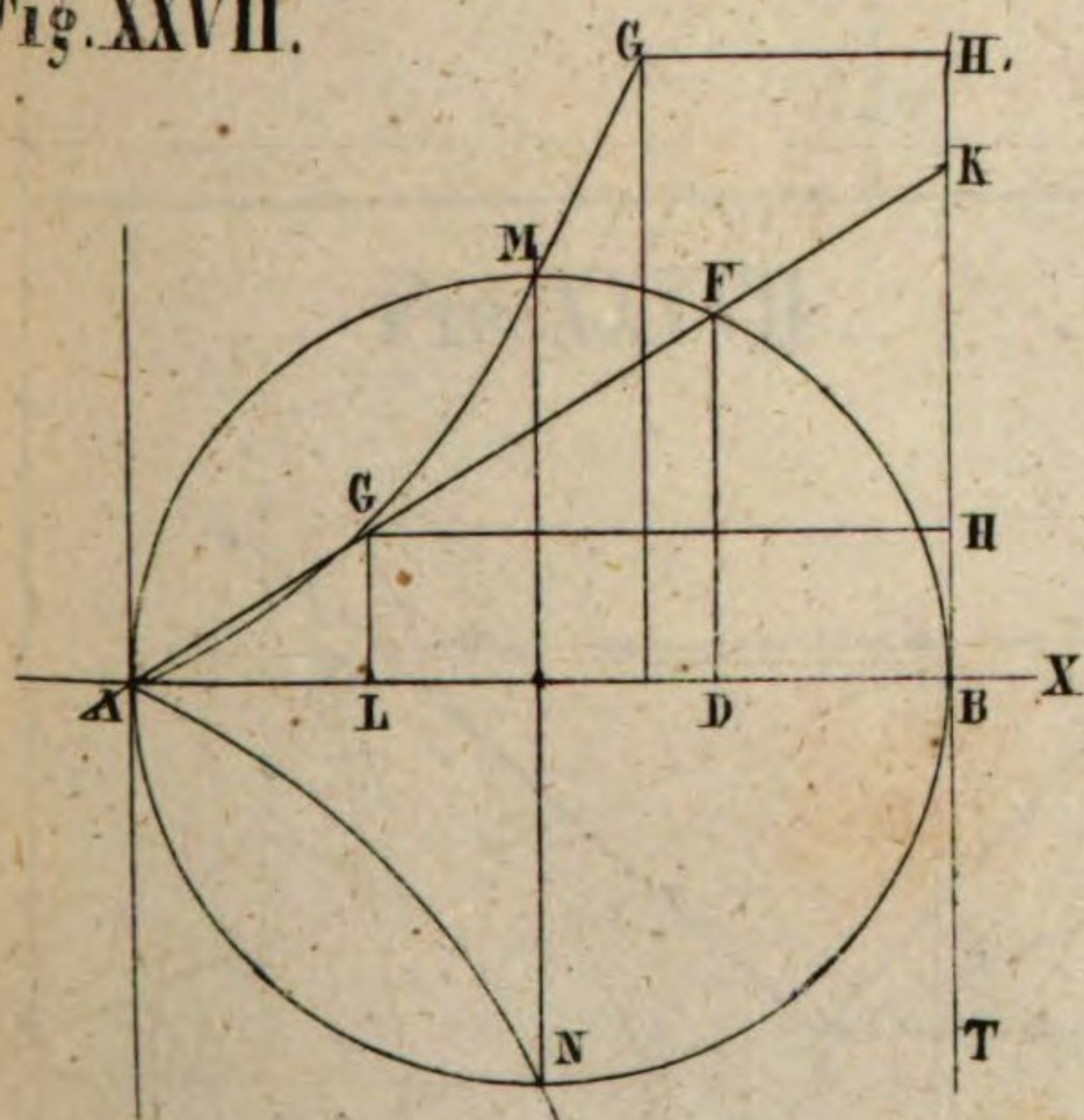
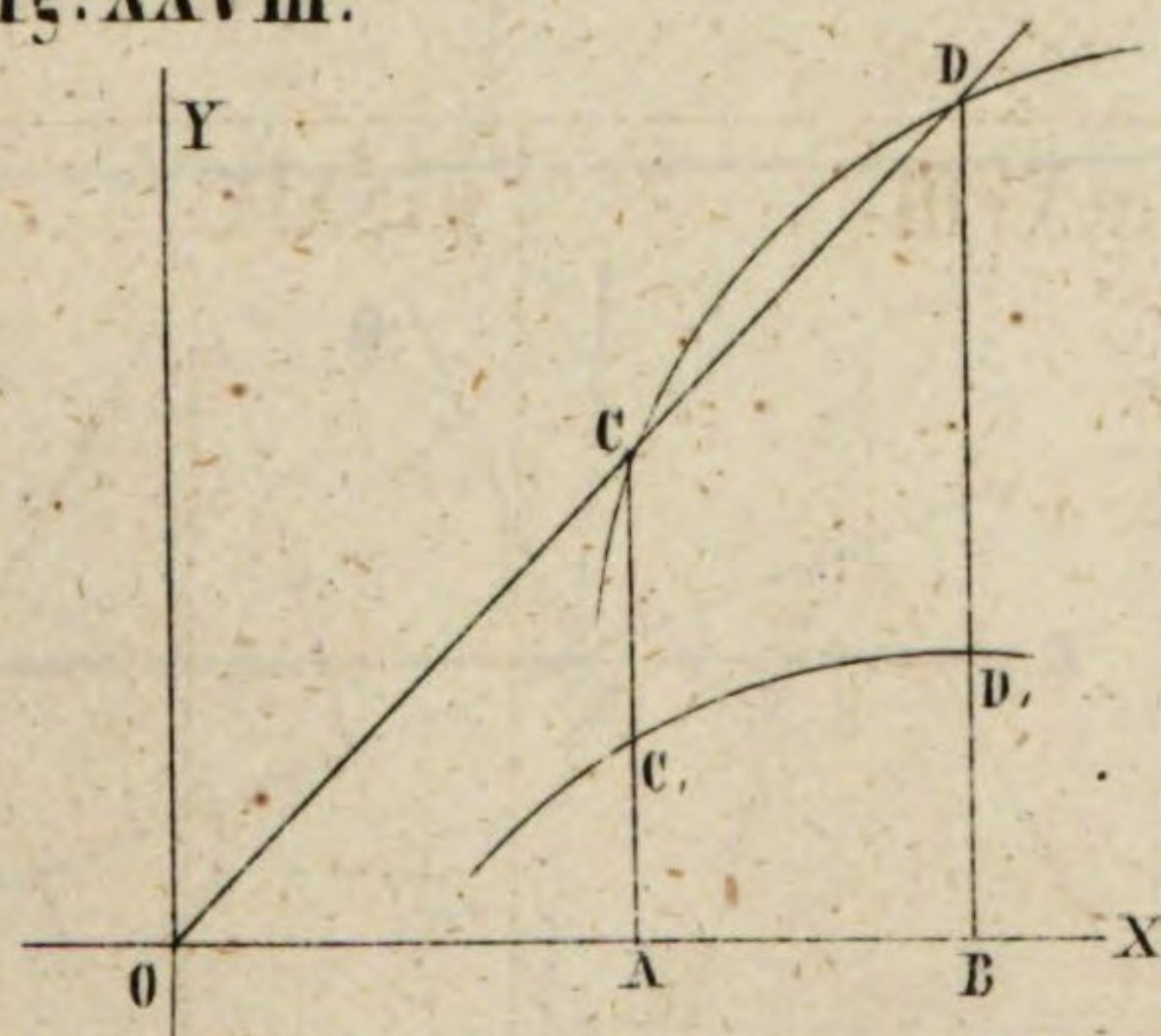
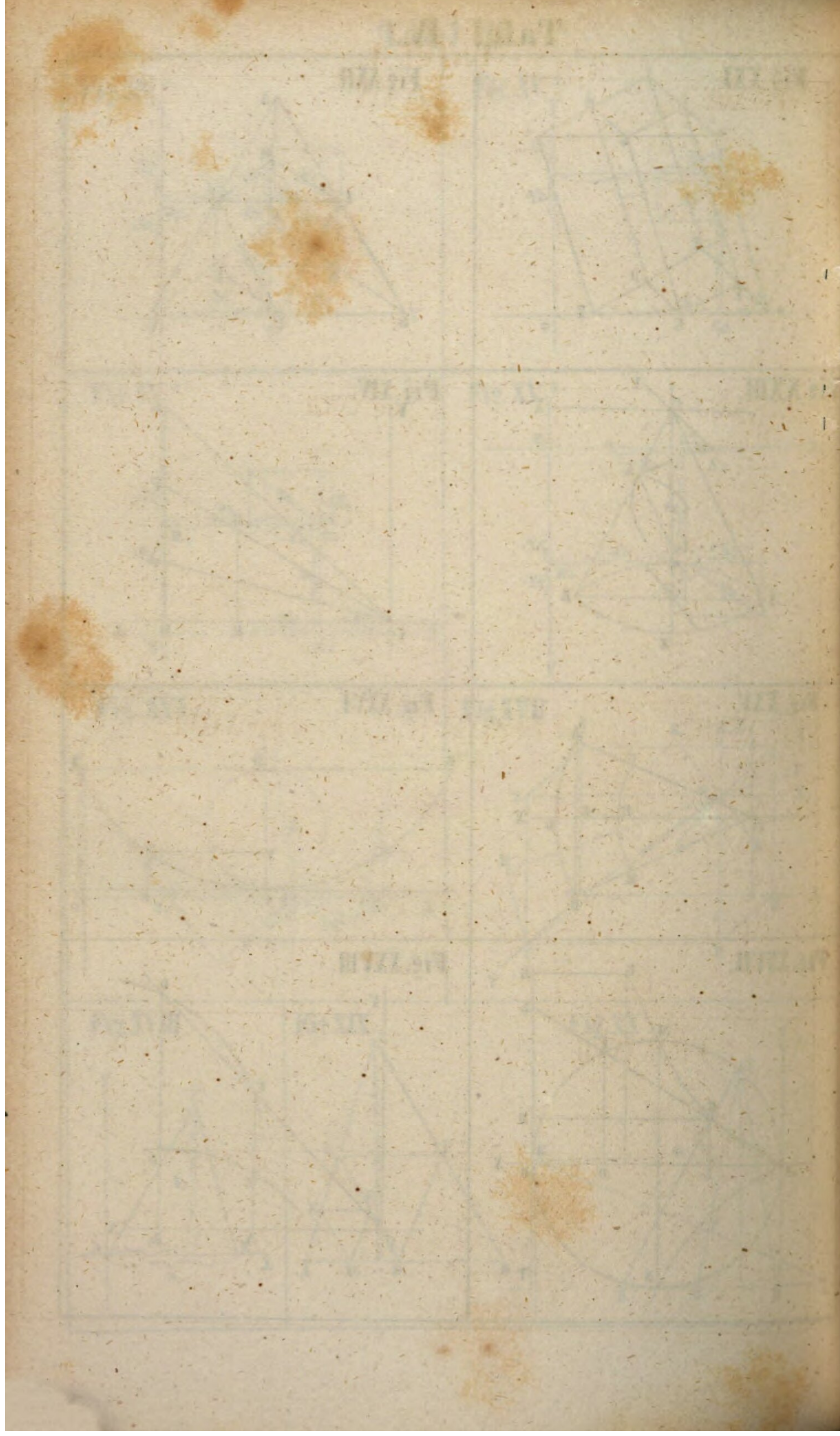


Fig. XXVIII.





Sohncke, Ludwig Adolph,

Analytische Vorlesungen

Bd.: II,1

Halle 1853

Math.p. 533 hb,II-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082849-3